کاربرد آموزشی تاریخ ریاضیات

سال‌ها باید که تا...

جشن‌نامهٔ
استاد پرویز شهریاری

به‌کوشش: دکتر رقیه بهزادی

تهران ـ ۱۳۸۲

بهزادی، رقیه. گردآورنده.
جشن‌نامهٔ استاد پرویز شهریاری / به‌کوشش رقیه بهزادی.ـ تهران: فردوس، ۱۳۸۲
۵۶۰ ص.: مصور، جدول.
ISBN 964 - 320 - 184 - 8
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
بالای عنوان: سال‌ها باید که ....
کتاب‌نامه.
۱. شهریاری، پرویز، ۱۳۰۵ ـ ـ ـ سرگذشت‌نامه. الف. عنوان.
۹ ب ۹ ش / Q ۱۴۳   ۵۱۰ / ۹۲
۱۳۸۱
کتاب‌خانهٔ ملی ایران   ۴۱۲۹۲ ـ ۸۱م

انتشارات فردوس

خیابان دانشگاه ـ کوچهٔ میترا ـ شمارهٔ ۷   تلفن ۶۴۱۸۸۳۹ ـ ۶۴۹۵۷۷۹

جشن‌نامهٔ استاد پرویز شهریاری

به کوشش: دکتر رقیه بهزادی

چاپ اول: تهران ـ ۱۳۸۲

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

حروفچینی: گنجینه

چاپخانه رامین

شابک ۸ ـ ۱۸۴ ـ ۳۲۰ ـ ۹۶۴   *ISBN 964 - 320 - 184 - 8*

۵۰۰۰ تومان

ترجمه: مهران اخباریفر ـ محمّد باقری
پژوهشگران تاریخ ریاضی

کاربرد آموزشی تاریخ ریاضیات

پیشکش به‌استاد فرزانه و بزرگوار آقای پرویز شهریاری که با آثار پرشمارش در زمینهٔ آموزش، تاریخ و سرگرمی‌های ریاضیات علاوه برتدریس مستقیم ریاضیات، آموزگار ده‌ها هزار دوستدار ریاضیات در ایران بوده است.

در من احساس شدیدی ـ در حد یقین ـ هست که علت گریزان بودن افراد از جبر این است که معلم‌ها نمی‌خواهند یا نمی‌توانند چراهای آن را توضیح دهند. هیچ حس تاریخی در ورای آموزش آن‌ها وجود ندارد، بنابراین، چنین احساس می‌شود که مبحث حاضر و آماده، از آسمان به‌زمین افتاده و تنها، به‌کار شعبده‌بازهای مادرزاد می‌آید.

ژاک بارزون ـ معلمی از آمریکا

از گذشته‌های بسیار دور تاکنون، همواره دل‌مشغولی مدرسان این بوده است که، به‌شیوه‌هایی از تدریس دست‌یابند که طی آن، شاگردان «چراها» را دریابند، درک درستی از مفهوم‌ها داشته باشند، ماهیت، تأثیر و جاذبهٔ ریاضیات را درک کنند و بالاخره، به‌این نتیجه برسند که انسان هم‌چنان درکار آفرینش ریاضیات است و خود آن‌ها هم، شاید از عهدهٔ کشف یا اختراعی برآیند.

مفهوم «حس تاریخی»، که در نقل قول بالا وجود دارد به‌تنهایی پاسخ‌گوی این خواست‌ها نیست. با این حال، حس تاریخی از ریاضیات، همراه با دانش روز از ریاضیات و کاربردهای آن، چنان‌چه درست به‌کار گرفته شود، ابزاری مهم در دست

آموزگارانی است که به‌پاسخ «چرا»ها می‌پردازند. در تدریس ریاضیات، سه دسته «چرا» وجود دارد که عبارتند از: چراهای *گاه‌شناختی*، *منطقی* و *آموزشی*.

تدریس هدف‌دار

چراهای گاه‌شناختی. نخستین دستهٔ چراها، مربوط است به‌سوالاتی نظیر این که، چرا هردرجه یا هرساعت شامل شصت دقیقه است و چرا هردقیقه با شصت ثانیه برابر است؛ در این جا، باید منشاء واژه‌هایی چون «صفر» و «سینوس» یا، واژه‌های «دقیقه» و «ثانیه» جستجو شود. این‌ها و بسیاری نکات تاریخی دیگر، هریک در حد خود، نه تنها پاسخ‌گوی سئوال خاصی هستند، بلکه بهانه‌هایی هستند که آموزگار ورزیده و آگاه، براساس آن‌ها، می‌تواند بحث‌هایی را پیش بکشد و دربارهٔ ضرورت و اختیاری بودن تعریف‌ها و اصطلاح‌های تعریف نشده، در مورد مبانی روان‌شناختی در دستگاه‌های ریاضی و راجع به‌پیدایی تعریف‌های عام‌تر مثل «عدد» یا «سینوس»، که با پیدایی دستگاه‌های جدید، دستخوش تغییر می‌شوند، تعمیم می‌یابند و به‌شکل تازه‌ای بیان می‌شوند که، هم برداشت تازه و هم برداشت قدیمی را دربربگیرند.

چراهای منطقی. دستهٔ دوم، یعنی چراهای منطقی، شاید به‌نظر مستقل از تاریخ ریاضیات باشند، ولی، تاریخ عملاً، می‌تواند در ایجاد بصیرت منطقی آموزندگان بسیار مؤثر باشد. چراهای منطقی عبارتند از، درک ماهیت دستگاه‌های اصل موضوعی و استدلال منطقی و برهان‌ها، که استخوان‌بندی اصل موضوعی ریاضیات را، از طریق قضایای ریاضی می‌پوشانند. مهم است که آموزندگان، این ساختارها را به‌تدریج درک کنند ولی، در بسیاری از مباحث، بیان مستقیم و فشردهٔ اصل موضوع‌ها، برهان‌ها، نه با روند تاریخی پیدایی آن‌ها همانند است و نه، با نحوهٔ شکل‌گیری مفاهیم در ذهن آموزندگان همخوانی دارد. ژاک آدامار Jacques Hadamard از قول هانری پوانکاره، از ریاضی دانان به‌نام معاصر، نقل کرده است که:

«آیا درک اثبات یک قضیه، عبارت است از بررسی قیاس‌های متوالی موجود در آن و کسب اطمینان از درستی آن و منطبق ساختن آن با قوانین بازی؟.... از نظر بعضی‌ها، آری، آن‌ها با انجام این کار اظهار می‌دارند که اثبات را دریافتیم.

اما، جواب اکثریت به‌این سؤال منفی است. اغلب، به‌این حد قانع نمی‌شوند و

می‌خواهند علاوه برپی بردن به‌درستی قیاس‌های هراثبات، بدانند که چرا این قیاس‌ها با فلان ترتیب خاص و نه با ترتیبی دیگر، به‌هم مربوط می‌شوند.»

رویکرد تاریخی، تنها راه انتقال درک علت پیوند قضایا، یا مسیر ریاضی برهان‌ها نیست، حتی، رویکرد تاریخی *بهترین* شیوهٔ انتقال این بصیرت، به‌شمار نمی‌آید. اما این رویکرد اغلب، فوق‌العاده مفید واقع می‌شود. این گفتهٔ معلمان ریاضی، راجع به‌برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی، گرچه با اندکی اغراق دربارهٔ آن چه «روش‌زایشی» خوانده‌اند همراه است، ولی پذیرفتنی به‌نظر می‌رسد:

«جیمز کلارک ماکسول James Clerk Maxwell گفته است: «بسیار مفید است اگر، آموزندگان در هرمبحثی، مطالب تازهٔ مربوط به‌آن مبحث را بخوانند، زیرا همیشه علوم تازه، بهتر جذب می‌شوند.» معلمان هدفمندی چون ارنست ماخ Ernst Mach، برای توضیح هرمفهوم، به‌روند پیدایی و سیر تاریخی آن، توجه می‌کردند. در این جا یک اصل کلی مطرح می‌شود: بهترین شیوهٔ هدایت تحول ذهنی فرد آن است که، بگذاریم مسیر یافتن آن مفهوم رادوباره بپیماید و البته در این کار، تنها به‌مسیر عمده و نه به‌خطا یا جنبه‌های فرعی، توجه داشته باشد.

این اصل «زایشی» می‌تواند ما را از خطای رایج دور بدارد: حتی اگر در برخی دستگاه‌ها A منطقاً مقدم بر B است، B را می‌توانیم در تدریس مقدم بداریم، به‌خصوص اگر، B بر A تقدم تاریخی داشته باشد. روی هم رفته، از رهنمودهای ناشی از روش زایشی، پیشرفت بیشتری در مقایسه با روش‌های کاملاً صوری ریاضیات می‌توان انتظار داشت.»

در گزارشی به‌کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی دانان (فوریه ۱۹۶۳) چنین آمده است که:

«پیشرفت ریاضی در روند تاریخی معمولاً ـ و نه همیشه ـ چنین است که ابتدا موضوعی در ریاضیات کشف می‌شود، سپس، یک یا چند نفر به‌امر کار مهم تنظیم این اطلاعات و تعیین حداقل تعداد اصل موضوع‌ها و استنتاج بقیهٔ مطالب از آن‌ها می‌پردازند. بنابراین، روشن است که آشنایی نسبی با دستگاه‌های اصل موضوعی ریاضیات، بخش مهمی از آموزش ریاضی است و در عین حال، ریاضیات چیزی برتر و فراتر از گسترش صرف اصل موضوع‌هاست.»

به‌کمک تاریخ ریاضی است که معمولاً، معلوم می‌شود ریاضیات چگونه «برتر و

فراتر» است. بی‌شک، مرور دوبارهٔ همهٔ خطاهای گذشته، بی‌معنی و نا به‌صرفه است. اما، جالب است که بدانیم دکارت، عددهای منفی را «دروغین» می‌نامید و از به‌کار بردن آن‌ها پرهیز می‌کرد؛ این که در گاوس Gauss «هراس از بینهایت» وجود داشت؛ این که نیوتن، چهار شیوهٔ مختلف برای بیان فلوکسیون (مشق) اختیار کرد، احتمالاً به‌خاطر آن بود که هیچ یک از آن‌ها از لحاظ ذهنی، راضیش نمی‌کرد؛ این که همیلتون Hamilton، هنگام تبیین اعداد مختلف به‌صورت «زوج مرتب» گمان می‌کرد، کار اساساً تازه‌ای انجام داده است. این مطالب، تنها حاکی از آن نیست که مردان بزرگ، زمانی با آن چه اکنون «مثل آب خوردن» سهل است، مشکل داشتند. بلکه، همچنین نشان می‌دهد که چگونه، ریاضیات از طریق تعمیم‌ها و تجریدها رشد می‌کند؛ این را هم معلوم می‌کند که ریاضیاتِ چند سال دیگر، مسلماً با ریاضیات امروز فرق دارد هرچند که، همچنان مفهوم‌های امروزین آن را، شاید با صورتی تغییر یافته، دارا باشد.

چراهای آموزشی. سومین دسته که شامل «چرا»های آموزشی است، شیوه‌ها و ابزارهایی هستند که با تعریف‌های اختیاری پذیرفته و مورد قبول مشخص نمی‌شوند و از لحاظ منطقی، منحصر به‌فرد نیستند. در این جاست که ابزارهایی چون «انجام کارهایی از داخل به‌خارج» در حذف پرانتزهای تودرتو، مطرح می‌شود. این کار، از لحاظ منطقی الزامی نیست ولی، تجربه و اندکی تأمل نشان می‌دهد که از این راه، امکان خطا کم‌تر می‌شود. به‌همین ترتیب، الگوریتم‌های مختلفی برای یک عمل خاص، مثلاً، تقریب‌های گویای $\sqrt{۲۶}$ وجود دارد، که همگی از لحاظ منطقی درست هستند. من، برپایهٔ شیوهٔ تدریس خود، در وهلهٔ اول، روش «تقسیم، معدل‌گیری و تکرار»، را که گاهی به‌اختصار روش «تقسیم» خوانده می‌شود، بیان می‌کنم. این کار، دلایل متعددی دارد. روش مذکور، به‌تعریف اساسی جذر نزدیک‌تر است (در واقع، ضمن انجام آن، تعریف جذر مرتباً در ذهن مرور می‌شود)؛ راحت‌تر فهمیده می‌شود؛ و به‌یادآوردنش آسان‌تر است. الگوریتم متعارف جذرگیری را می‌توان بعداً و در مباحث مختلف عرضه کرد، مثلاً به‌خاطر ارتباطش با مجذور دوجمله‌ای‌ها، یا چند جمله‌ای‌ها، یا ارتباطش با بسط دو جمله‌ای دارای نمای کسری به‌سری بی‌پایان، یا به‌خاطر پیوندی که با روش‌های بارستی (تکراری) دارد.

مطالب تاریخی می‌توانند چه در انتخاب و چه در تشریح این گونه روش‌ها، که از

لحاظ تدریس باارزشند، مفید واقع شوند. مثلاً شواهد کافی در دست است که بابلی‌ها، از روش تقسیم برای جذرگیری استفاده می‌کردند. می‌دانیم که مقدار تقریبی $\sqrt{a^2+b}$ به‌صورت $a+(b/2a)$ را، یونانیان کهن می‌شناختند و مراجعه به‌نمودار مربع شکل مربوط به‌بسط $(a+b)^2$ در *اصول* (مقالهٔ دوم، قضیهٔ ۴)، می‌تواند ذهن را به‌چنین تقریبی هدایت کند. استفادهٔ مکرر از این تقریب، برای رسیدن به‌تقریب‌های گویای متوالی دقیق‌تر، در کتاب هرون Heron اسکندری آمده است. هرون، برخلاف ریاضیدانان فیلسوف یونانی پیش از خود، نظیر فیثاغورس، اقلیدس و آپولونیوس Appolonius، به‌دستگاه‌های مکانیکی، نقشه برداری و محاسبات مربوط به‌آن‌ها علاقه‌مند بود (چنان که نخستین موتور جت را اختراع کرد). (فرمول مساحت مثلث، که به‌نام وی «فرمول هرون» خوانده می‌شود، شامل عمل جذرگیری است و بی‌شک، به‌وسیلهٔ وی به‌کار می‌رفت هرچند احتمال می‌رود که درواقع، یافتهٔ ارشمیدس باشد.) روش عملی جذر، به‌صورتی که اکنون تدریس می‌شود، شامل یک تقریب زدن و تکرار کارهایی روی این تقریب است. این عمل، شامل کار دیگری یعنی (جدا کردن دوتا دوتای رقم‌ها، تا آخر)، که به‌دستگاه شمارش موضعی بستگی دارد نیز هست. این دستگاه، گرچه تا حدی توسط بابلی‌ها شناخته شده بود، ولی هنوز آن قدر تکامل نیافته بود که بتواند در این الگوریتم به‌کار رود، تا این که، ریاضیات هندی به‌وجود آمد. این نمونهٔ جالب، نشان می‌دهد که رویکرد زایشی در کار تدریس، چه کمک ارزنده‌ای به‌معلم می‌کند، تا روند آموزش و ابزارهای آموزشی مناسب‌تری را برگزینند. به‌کارگیری این تاریخچه، همراه با نمودارها و روش‌های مربوط به‌آن، می‌تواند در تفهیم مفاهیمی بنیادی چون اعداد گنگ، تقریب‌های گویا برای اعداد گنگ، روش‌های بارستی (تکراری) و دستگاه شمارش دهدهی، جداً مفید واقع شود.

توصیه‌هایی برای استفاده از تاریخ ریاضیات

گردآوری شواهد دربارهٔ اهمیت و ارزش مطالعهٔ تاریخ ریاضیات، چه برای آموزگاران و چه برای آموزندگان، چندان دشوار نیست. در بسیاری از گزارش‌های مربوط به‌مطالعات یا فعالیت کمیته‌های ویژه در بسیاری از کشورها، توصیه‌هایی جهت گنجاندن مطالعهٔ تاریخ ریاضیات، در برنامه‌های تربیت معلم دیده می‌شود. بررسی پیرامون

گرایش‌های موجود در آموزش توسط دبیران ریاضی، حاکی از افزایش تعداد مؤسساتی است که چنین درسی را در برنامهٔ خود گنجانده‌اند و در برخی موارد، این درس برای همهٔ دانشجویان رشتهٔ ریاضی، اجباری بوده است.

اما، با وجود همهٔ این ادعاها و توصیه‌ها، تاریخ ریاضیات، کاربردی در آموزش نخواهد داشت مگر آن‌که، کاربردهای آن اولاً، از عرضهٔ آن، هدف‌های روشنی را دنبال کند و ثانیاً، برای رسیدن به‌این هدف‌ها، برنامهٔ سنجیده‌ای اختیار شود. در ادامهٔ مطلب، به‌ذکر این گونه هدف‌ها و تشریح روش‌های رسیدن به‌آن‌ها می‌پردازیم. برای این منظور، داستان‌ها و شرح‌های تاریخی، یا از اشارات کوتاه به‌ماجراها استفاده می‌کنیم. در این جا، منظور عرضهٔ خود تاریخ ریاضیات نیست، بلکه مقصود آن است که، به‌طور عینی نشان دهیم که چگونه و به‌چه جهت از مطالب تاریخی استفاده می‌شود. به‌نظر ما، این کمال مطلوب است ولو آن که، در پاره‌ای موارد به‌علت پرداختن به‌توجیه بیش از یک نکتهٔ مهم، از وضوح مطلب کاسته شود.

پیدایی دستگاه‌های شمارش

مطلب پیدایی دستگاه‌های شمارش گوناگون، و به‌خصوص دستگاه دو دویی، موضوع بسیار جالبی است برای نشان دادن این که، چرا انسان به‌ریاضیات می‌پردازد و نیز جهت عرضهٔ پیوندهای میان ریاضیات و جهان مادی پیرامون ما. عناصر اصلی هردستگاه شمارش موضعی یا «جاارز» بدین قرار است: یک عدد صحیح دلخواه بزرگ‌تر از ۱ به‌نام b، که به‌عنوان پایه انتخاب می‌شود؛ مجموعه‌ای از b رقم مختلف شامل صفر؛ و ضوابط ضربی و جمعی. (ضابطهٔ ضربی یعنی این که هررقم را باید در توانی از پایهٔ متناظر، با موضوعی که رقم در آن نوشته می‌شود ضرب کرد، و ضابطهٔ جمعی این است که، عدد نشان داده شده با این نمادها، مجموع حاصل ضرب‌های مذکور خواهد بود.) نهایتاً، یک ممیز یا ابزار دیگری برای مشخص کردن موضع «رقم یکان» یا موضع مربوط به b^0 هم لازم است.

دستگاه‌های موضعی. عناصر مختلفی که یک دستگاه شمارش موضعی کامل را تشکیل می‌دهد، از لحاظ تاریخی، در زمان‌های گوناگون و درکشورهای مختلف پدیدار شد. مصری‌ها، یونانی‌ها و رومی‌ها، نمادهای خود را درگروه‌های ده‌تایی دسته‌بندی

می‌کردند و به‌تعبیری، مفهوم پایه را به‌کار می‌گرفتند. بابلی‌های باستان، اولین کسانی بودند که دستگاه موضعی را به‌کار بردند؛ اما، دستگاه آن‌ها که برپایهٔ شصت بود، ابهام داشت، زیرا آنان برای ساختن نمادها از تکرار استفاده می‌کردند و فاقد صفر و «ممیز شصتگانی» بودند. مثلا، نماد ▼▼ را می‌شد ۲، $\frac{2}{60}$، $1\times60+1$ یا حتی $1\times60^2+0\times60+1$ خواند. دردستگاه هندی، با به‌کارگیری نمادهای متمایز، برای هریک از اعداد صحیح کوچکتر از ده، که در این دستگاه پایه را تشکیل می‌دهد، دو منبع اول ابهام از میان رفت. اما بابلی‌ها، بیش از سه هزار سال پیش از آن که دستگاه هندی، توانایی نمایش عددهای کوچکتر از ۱ را بیابد، نمادگذاری جاارز برای عددهای کوچک‌تر از ۱ را، پدید آوردند. دستگاه هندی در زمانی سیمون استوین Simon Stevin از اهالی بروژ Bruges (۱۵۸۵ میلادی)، به‌کسرهای اعشاری گسترش یافت و روشی برای مشخص کردن نقطهٔ جدایی نمایش عددهای صحیح، از نمایش کسرها، ابداع شد. این گونه تحلیل تاریخی مؤلفه‌های دستگاه شمارشی را که به‌کار می‌گیریم، همراه با بررسی مزایای آن و با توجه به‌بستگی الگوریتم‌های محاسباتی خودمان به‌این دستگاه، ممکن است درک عمیق و علاقه به‌فنون حساب را دربر داشته باشد.

دستگاه دودویی. گذشته از این، چندین مفهوم و بینش مهم را، با بررسی جزئیات بسط دستگاه دودویی به‌آسانی می‌توان نشان داد. پژوهش انسان‌شناختی در مورد قبایل غربی تورس استریتس Torres Straits، که در سال ۱۸۸۹ میلادی منتشر شد، خبر از قبیله‌ای می‌دهد که تنها دو واژه برای عدد داشته‌اند، *اوراپون* و *اُکُزا*، به‌ترتیب، برای ۱ و ۲. آن‌ها نام عددهای ۳، ۴، ۵، و ۶ را با گروه‌بندی همان دو واژه می‌ساختند: *اُکُزا اوراپون، اکزااکزا، اکزااکزا اوراپون، اکزااکزااکزا*. این کلّ نام‌هایی بود که برای اعداد داشتند و علاوه براین‌ها، *راس* را، برای هرعدد بزرگ‌تر از ۶ به‌کار می‌بردند. این جامعهٔ ابتدایی، اگرچه نسبتاً قدیمی نیست، به‌جوامع پیش از تاریخ شباهت دارد؛ و داستان این قبیله دو چیز را نشان می‌دهد. اول این که بی‌شک در دوران پیش از تاریخ، نام‌هایی برای عددها و همچنین دستگاه‌هایی برای شمارش وجود داشته است (استخوان‌های علامت‌گذاری شده و شمارنده‌های مفرغی مربوط به‌دوران پیش از تاریخ، این ادعا را تأیید می‌کند) و دیگر این که، این دستگاه‌های شمارش، بدون تردید به‌سبب نیازهای زندگی روزمره، تجارت، مالیات و داد و ستد به‌وجود آمده بودند.

علی رغم قدیمی بودن برخی از مؤلفه‌های دستگاه شمارش موضعی جاارز، ارائهٔ ساختار مجرد و کلی آن، نسبتاً جدید است. وقتی از دیدگاه امروزی واژه‌های قبیلهٔ توریس استریتس را برای عددها، که به‌گروه‌های دوتایی تقسیم می‌شوند، بررسی می‌کنیم ممکن است یک دستگاه دودویی اولیه را مشاهده کنیم، ولی نخستین توصیف از دستگاه دودویی، در سال ۱۷۰۳ میلادی منتشر شد. این اثر را، گوتفرید ویلهلم فُن لایبنیتز Gottfried Wilhelm von Leibniz، فیلسوف مشهور آلمانی و مبدع حساب دیفرانسیل و انتگرال، نوشته بود. و محرک او برای ارائهٔ این کار، تاحدی توضیح نمادهای نیمه اسطوره‌ای کشف شده در آثار قدیمی چینی بود. اما لایبنیتز چنان شیفتهٔ این اندیشه شده بود که، بحثی گسترده و تعمیم یافته را در مورد این که چگونه می‌توان هرعدد دلخواه را به‌عنوان پایه، برای بسط یک دستگاه شمارش به‌کار گرفت، به‌رشتهٔ تحریر درآورد. علاقهٔ او به‌مذهب و فلسفه، سبب شیفتگی او نسبت به‌دستگاه دودویی شد، چراکه در این دستگاه هرعددی را، هرقدر هم که بزرگ باشد، می‌توان با استفاده از تنها دو نماد ۰ و ۱ نوشت. لایبنیتز، در دستگاه دودویی، نشانه‌هایی از داستان آفرینش عالم در عهد عتیق را می‌دید؛ داستانی که از آن درمی‌یابیم خداوند، که لایبنیتز ۱ را به‌او نسبت می‌داد، عالم را از هیچ، یا خلاء، که لایبنیتز با صفر متناظرش می‌دانست، آفرید. حتی گفته شده است که لایبنیتز دستور داد، مدالی به‌یادبود این اندیشه ضرب شود.

مفاهیمی که به‌توسط دستگاه دودویی نشان داده می‌شود. در هرصورت، این داستان‌ها چند نکته را که امروزه در ریاضیات پذیرش عام یافته‌اند، به‌دانش‌آموزندگان نشان می‌دهد؛ مثلاً این که (۱) اغلب ارتباط‌هایی بین ریاضیات و فلسفه، و حتی بین ریاضیات و مذهب وجود دارد؛ (۲) نیازهای عملی، اجتماعی، اقتصادی، و فیزیکی اغلب، محرک بسط اندیشه‌های ریاضی‌اند؛ اما، (۳) کنجکاوی ذهنی، یعنی کنجکاوی انسانی، که از خود می‌پرسد «چه اتفاقی می‌افتد اگر...؟»، به‌تعمیم و گسترش و حتی تجرید اندیشه‌های ریاضی منجر می‌شود؛ و (۴) درک بسط اندیشه‌های مجرد و کلّی، همراه با درک الگوها یا ساختار ریاضیات، می‌تواند یکی از عملی‌ترین هدف‌های آموزش ریاضیات باشد.

این واقعیت، که اگرچه لایبنیتز هیچ‌گونه کاربردی برای دستگاه دودویی پیشنهاد نکرد، این دستگاه در سال‌های اخیر، نقشی اساسی در گسترش کامپیوترهای رقمی الکترونیکی با سرعت بالا و همچنین، در گسترش نظریهٔ اطلاعات و انواع گوناگون

پردازش اطلاعات ایفاکرده است، چهارمین نکتهٔ یاد شده در بالا را نشان می‌دهد. در این مورد، بینش و درک حاصل از نظریه‌ای ریاضی، آن طورکه توسط لایبنیتز ارائه شد، و نه کاربرد فوری و محدود شمارش، آن طورکه بومیان تورس استریتس به‌کارگرفتند، منجر به‌شناخت کاربرد دستگاه دودویی در زمینه‌ای شد که مخترع آن، هرگز تصورش را نمی‌کرد.

مفهوم مدل در ریاضیات. نکتهٔ دیگری راکه این سیر تاریخی نشان می‌دهد، در ریاضیات نوین مطلبی اساسی است، یعنی این که (۵) مفهوم «مدل»، هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردی، مهم است. مدل در این مورد، چه از نظر توصیف و چه از نظر درک، بسیار ساده است. مدارهای الکتریکی می‌توانند دو حالت داشته باشند: باز باشند یا بسته. چراغ‌های الکتریکی یا تفنگ‌های الکترونی یا درخشان‌اند یا درخشان نیستند؛ یعنی روشن‌اند یا خاموش. در دستگاه شمارش دودویی، تنها دو نماد به‌کار می‌رود. در هرموضع، ۱ یا ۰ قرار دارد. وقتی از دیدگاه تاریخی و به‌منظور فهم یک ساختار کلی به‌این موضوع می‌اندیشیم، تناظر روشن و آشکاری را مشاهده می‌کنیم. اگر هرموضع در دستگاه شمارش را، متناظر با یک مدار الکتریکی در نظر بگیریم، و اگر رقم‌های ۰ و ۱ را متناظر با مدارها یاکلیدهای باز و بسته بگیریم، تناظری بین مجموعه‌ای از عناصر فیزیکی و مجموعه‌ای از مفاهیم و نمادهای ریاضی به‌دست می‌آوریم. هریک از این دو مجموعه را می‌توان مدلی برای دیگری دانست. اگر مدل به‌خوبی انتخاب شده باشد، هرعمل یا حالت در یک‌دستگاه، عمل یا حالت متناظری در دستگاه دیگر دارد. بنابراین، می‌توان عمل‌هایی را در یک دستگاه انجام داد و نتیجه‌گیری‌هایی به‌عمل آورد و این نتایج را در دستگاه دیگر تعبیر کرد.

درک نقش مدل‌های جفت شده (ریاضی و فیزیکی یا اجتماعی یا اقتصادی) در کاربردهای ریاضیات، نه تنها اهمیت ریاضیات محض و نقش کنجکاوی ذهنی را آشکار می‌سازد، بلکه آموزندگان را در فهم ماهیت خود ریاضیات، یاری می‌کند. ریاضی دانان ممکن است توسط مسائلی فیزیکی ترغیب شوند و به‌نمودارهای هندسی توسل جویند، اما ریاضیاتی که ایجاد می‌کنند، یک تجرید است. این مفهوم «مدل»، خودکاملاً جدید است، اما زمینهٔ تاریخی گسترده‌ای دارد، و می‌توان مراحلی راکه به‌درک این مفهوم منجر شده‌اند، مطالعه کرد. مثلاً ریاضی دانان، سال‌ها هندسهٔ اقلیدسی را تنها

مدل ممکن برای فضای واقعی اطراف ما می‌دانستند، و گذشته از این، هندسهٔ اقلیدسی را یک حقیقت و دستگاه تجرید شدهٔ ایده‌آل از دستگاه نقاط و خطوط فیزیکی تصور می‌کردند. اصول هندسهٔ اقلیدسی را، احتمالاً برمبنای مشاهدات دنیای واقعی و نمودارهای هندسی، لازم و بدیهی می‌دانستند. اما امروزه، سرچشمه و نقش اصول موضوعات از دیدگاهی متفاوت بررسی می‌شود.

ریاضیات به‌عنوان یک هنر

امروزه ریاضی دانان اغلب، ریاضیات و آفرینش آن را به‌موسیقی و هنر بیشتر شبیه می‌دانند تا به‌علم. ج.و.ن. سولیوان Sullivan [۷] نوشته است:

«خوب است که طبقه‌بندی ریاضیات به‌عنوان یکی از علوم را حفظ کنیم، اما، منصفانه‌تر آن است که ریاضیات را یک هنر یا بازی بنامیم... ریاضیات برخلاف علوم، و همانند هنر موسیقی یا بازی شطرنج، آفرینش آزادانهٔ ذهن است، بدون هیچ محدودیتی جز ماهیت خود ذهن. در اصول موضوع یا تعریف‌های بنیادی هیچ شاخه‌ای از ریاضیات، چیزی الزامی وجود ندارد، همه چیز اختیاری است؛ نه به‌این معنی که انتخاب اصل موضوع یا تعریف‌ها، از نظر *روان‌شناختی* اختیاری بوده است، بلکه از لحاظ منطقی، اختیاری بوده است.

مطمئناً، مصریان و بابلیان باستان چنین برداشتی از ریاضیات نداشتند، و حتی فیثاغوریان نیز که مبنای موسیقی، فلسفه، و در واقع همهٔ عالم را در اعداد می‌دانستند، دارای چنین دیدی نبودند. حتی اقلیدس، که نخستین ساختار اصل موضوعی و موفقیت‌آمیز را سازماندهی کرد، و این کار را با چنان ظرافتی انجام داد که با اندک تغییری بیش از دو هزار سال پایدار ماند، چنین تصوری دربارهٔ آن چه انجام داده بود، نداشت.

اگر ریاضیات هنر است، به‌دست دادن درکی از این واقعیت، و رابطهٔ میان ریاضیات و دنیای واقعی فیزیکی، می‌تواند بخشی از آموزش عمومی هرپزشک، هرحقوقدان، یا هرشهروند با هوش متوسط را تشکیل دهد، درست همان طور که به‌دست دادن درکی از علوم انسانی در چنین آموزشی گنجانده می‌شود.

هندسهٔ نااقلیدسی

برای کسانی که آموزش محدودی در ریاضیات پیشرفتهٔ نوین می‌بینند، بررسی اندکی از تاریخ هندسهٔ نااقلیدسی، یا رابطهٔ ریاضیات و دیدگاه انسان از جهان، می‌تواند وسیله‌ای برای عرضهٔ بینشی ولو جزئی، اما ارزشمند باشد.

هندسهٔ نااقلیدسی، زاییدهٔ کنجاوی ذهنی، بدون توجه به‌کاربردهای عملی، است؛ چنین کاربردهایی، سال‌ها پس از تولد هندسهٔ نااقلیدسی پدیدار شد. از این نظر، هندسهٔ اقلیدسی به‌هنر می‌ماند. داستان هندسهٔ نااقلیدسی نیز مانند داستان‌های دیگری که بازگو می‌کنیم، بیش از یکی از هدف‌ها و بینش‌های مهمی را که در بحث پیرامون زمینه‌های تاریخی مدّ نظر است، نشان می‌دهد. تقریباً از همان زمان اعلان اصل توازی توسط اقلیدس، نارضایی از این اصل، وجود داشته است. همواره کسانی می‌خواستند بیانی هم‌ارز با این اصل، ولی بهتر یا ساده‌تر از آن بیابند، یا آن را به‌عنوان قضیه‌ای وابسته به‌اصول دیگر ثابت کنند. اگرچه هندسه‌دانان ایرانی در این زمینه کارهایی کرده بودند، اولین کسی که بسیاری از قضیه‌های هندسهٔ نااقلیدسی را به‌دست آورد، جیرولامو ساکری Girolamo Saccheri بود. ساکری، هرگز متوجه نشد که واقعاً چه کاری انجام داده است. او گمان می‌کرد که در کتاب خود، تحت عنوان «اقلیدس مبری از همهٔ نارسایی‌ها»، که در سال ۱۷۷۳ انتشار یافت، اصل توازی را، با مفروض گرفتن اصلی دیگر و نشان دادن این که به‌تناقض منجر می‌شود، ثابت کرده است. اما «تناقض»ی که وی نهایتاً به‌دست آورد، واقعاً تناقض نبود، بلکه قضیه‌ای از هندسهٔ نااقلیدسی بود که با قضیهٔ قابل قیاس با آن، در هندسهٔ اقلیدسی فرق داشت. ساکری، بدون دریافت اهمیت و ماهیت اختیاری اصول موضوع، و امکان وجود هندسه‌های متفاوت برمبنای مجموعه‌های مختلفی از اصول موضوع سازگار، ولی اختیاری، نمی‌توانسته است درکی صحیح از آن چه انجام داده بود، داشته باشد.

نیکلای ایوانوبیچ لباچفسکی Nikolai Ivanobich Lobachevsky و یانوش بالیای Janos Bolyai نیز که در قرن نوزدهم هندسهٔ اقلیدسی را ابداع کردند، خود متوجه نبودند که با ابداع هندسهٔ نااقلیدسی، انقلابی در ریاضیات به‌وجود آورده‌اند. و حاصل کار عبارت بود از: (۱) درک ماهیت و اهمیت اصول موضوع؛ (۲) مفهوم امکان وجود بسیاری از دستگاه‌های مختلف ریاضی؛ و (۳) تلاش برای اصل موضوعی کردن همهٔ

شاخه‌های ریاضی، که منجر به‌جبرهای مختلف، هندسه‌های گوناگون، برهان‌های سازگاری و استقلال، و سرانجام، همهٔ مطالعات فلسفی و منطقی شد که در سال‌های اخیر، تحت نام جدید «فراریاضیات» انجام گرفته است.

مبدعان هندسهٔ نااقلیدسی، نه تنها متوجه ارتباط کارشان با فلسفه و منطق و مبانی ریاضیات نشدند، بلکه مطمئناً، هرگز گمان نمی‌کردند که صدسال بعد از این، فیزیک‌دانان، در فرمول‌بندی نظریهٔ نسبیت، هندسهٔ نااقلیدسی را درست همان ابزاری بیابند که، برای ساده‌سازی نظریهٔ اصلی اینشتین به‌آن نیاز دارند.

این داستان جذاب، با گستره‌ای از ارتباطات، که می‌توان تا فلسفهٔ یونان باستان به‌خصوص، تشخیص ماهیت و اهمیت تعریف‌ها توسط افلاتون و نیز کار ارسطو در منطق ـ دنبال کرد، بازهم ارتباط ریاضیات را با جنبه‌های دیگر فرهنگ بشری، به‌ویژه فلسفه و دانش فلسفی منطق نشان می‌دهد. و نمودار واقعیت است: (۱) این که ابداع کنندگان مفاهیم و دستگاه‌های ریاضی غالباً کاربردهای این مفاهیم و دستگاه‌ها را پیش‌بینی نمی‌کنند و چنین کاربردهایی سال‌ها بعد، به‌طرقی پیش‌بینی نشده یافت می‌شود؛ و (۲) این که بینش ریاضی‌دانان از موضوع ریاضیات در طول زمان، تغییر می‌کند و گسترش می‌یابد.

رابطهٔ میان ریاضیات و دنیای فیزیکی، راه دوطرفهٔ جالب و گاهی پیچیده است. نیازهای فیزیکی و شهود برمبنای تصورات فیزیکی، مانند نقطه و خط، ممکن است برانگیزانندهٔ تفکر و شهود ریاضی‌دانان باشد؛ از طرف دیگر، ریاضیاتی که به‌صورت نظریهٔ محض ساخته می‌شود، یا پس از بسط و تعمیم به‌نظریه‌ای مجرد تبدیل می‌شود، ممکن است در دست کسانی دیگر، به‌عنوان ابزاری برای کشف و گسترش نظریه‌های پیش‌بینی نشدهٔ فیزیکی، یا حتی اجتماعی یا اقتصادی به‌کار گرفته شود.

بسط و تعمیم متوالی

چنان که ملاحظه شد، فرایند بسط و تعمیم متوالی طی سده‌ها روی داده است. اکنون این فرایند را، به‌عنوان الزامی آموزشی و مسأله‌ای آموزشی، در طرح و تدریس هربرنامهٔ درسی ریاضیات نوین بررسی می‌کنیم. اگرچه امروزه گفتگوهای بسیاری صورت گرفته مبنی براین که، آموزش ریاضیات باید در سطحی پیشرفته‌تر از آن چه درگذشته معمول

بوده است آغاز شود. تاکنون کسی پیشنهاد نکرده است که بحث دربارهٔ دستگاه‌های عددهای حقیقی و مختلط را باید از کودکستان آغاز کرد. اگر فرض شود که به‌لحاظ آموزشی، تدریس عددهای صحیح مثبت پیش از سروکار یافتن با عددهای منفی، کسری، ناگویا، و غیره مطلوب باشد، به‌طور خودکار، موقعیتی پیش می‌آید که موظفیم به‌کودکان تفهیم کنیم که، چگونه دستگاه‌های اعداد به‌تدریج، گسترش یافتند تا برمشکلاتی نظیر عدم امکان تفریق عدد بزرگتر از عدد کوچکتر، تقسیم ۳ بر ۲ (در حوزهٔ اعداد صحیح)، یافتن جذر ۴ ـ و غیره غلبه کنیم. مشکل آموزشی این است که آن چه قبلاً به‌عنوان ناممکن تلقی شده بود، به‌ناگاه ممکن می‌شود، و همان واژهٔ «عدد»، که قبلاً به‌معنی دیگری به‌کار رفته بود، معنی جدید و گسترده‌تری می‌یابد و ویژگی‌ها و کاربردهای تازه‌ای نیز پیدا می‌کند.

مثالی سودمند از این فرایند بسط و تعمیم را می‌توان در بسط توابع مثلثاتی نوین یافت. چنین توابعی، ریشه در اخترشناسی یونانی دارد. اخترشناسان یونانی فرض می‌کردند که سیارات در مدارهایی دایره‌ای حرکت می‌کنند. نیاز به‌تعیین وترهای دایره، در صورت دانستن کمان‌های متناظر، باعث به‌وجود آمدن توابع مثلثاتی شد. بطلمیوس طول وترها را محاسبه و جدول‌هایی تنظیم کرد. بخش زیادی از هندسهٔ اولیهٔ یونانی، به‌خصوص بخش‌های مربوط به‌ترسیم چندضلعی‌های منتظم، در این محاسبات (دست کم تا حدی)، به‌کار گرفته شد. بطلمیوس، کاری را که توسط هیپارخوس Hipparchus آغاز شده بود، گسترش داد. ریاضی‌دانان هندی حدود ۵۰۰ میلادی، جدول‌های نصف وتر را سودمندتر یافتند؛ آن‌ها چنین جدول‌هایی را محاسبه کردند و واژهٔ «سینوس» نیز به‌طور غیرمستقیم از ابداعات آن‌هاست. «سینوس»، تغییر شکل یافتهٔ واژه‌ای لاتینی است که ترجمهٔ واژهٔ عربی «جیب» است که ریاضی‌دانان ایرانی، اشتباهاً، به‌جای واژهٔ هندی «جیا»، به‌معنی «نصف وتر» به‌کار می‌بردند. در مراحل بعدی، سینوس، به‌صورت‌های گوناگون «ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ مفروض و وتر یک»، «نسبت به‌ضلع مقابل زاویهٔ حاده به‌وتر در مثلث قائم‌الزاویه»، «نسبت عرض به‌بردار شعاع برای زاویه‌ای در مرکز دایره»، «عرض نقطه‌ای روی دایرهٔ واحد، که با پیچیدن قطعه خطی حول دایره به‌دست می‌آید»، «حد یک سری نامتناهی متناظر با عددی حقیقی در سری جایگذاری شود»، «حد یک سری نامتناهی متناظر با یک عدد مختلط

که در سری جایگذاری شود» و «تابع وارون رابطه‌ای که توسط یک انتگرال معین داده شده است» تعریف شد. همهٔ جدول‌هایی که با این تعریف‌های گوناگون محاسبه می‌شود، هم‌ارز با یکدیگر یا قابل اشتقاق از یکدیگرند. همهٔ این تعریف‌ها و همهٔ این جدول‌ها را می‌توان برای مسأله‌های مربوط به‌وترهای دایره و ضلع‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه، یا بازاویهٔ منفرجه به‌کار برد. اما تعریف‌های مجردتر و کلی‌تر، که بستگی به‌تصورات زاویه، مثلث، یا حتی لزوماً ،دایره یا کمان ندارند، تعریف‌هایی هستند که خصوصاً برویژگی‌های خاص این توابع مثلثاتی تکیه دارند. احتمالاً، مهم‌ترین ویژگی در میان این ویژگی‌های خاص، تناوبی بودن این تابع‌هاست.

به‌سبب مطالعهٔ پدیده‌های تناوب مانند فنرهای مرتعش، ضربه‌های الکتریکی، امواج رادیویی، امواج صوتی، و بسط نظریه‌های فیزیکی مانند نظریهٔ موجی نور، داشتن مدل‌ها، توابع و رابطه‌های ریاضی تناوبی مهم است. توابع مثلثاتی به‌تدریج، که در طول تاریخ از بستگی به‌دایره و مثلث و نسبت جدا شدند و کلیت یافتند و به‌صورت مجرد مجموعه‌هایی از جفت‌های مرتب عددهایی که توسط ابزارهایی چون مجموع‌یابی سری‌های متناهی به‌یکدیگر مربوط شده‌اند درآمدند، سودمندتر شدند. استفادهٔ از آن‌ها، دیگر محدود به‌موقعیت‌هایی نبود که با زاویه و مثلث سروکار داشته باشیم، بلکه به‌توابعی از عددهای حقیقی (یا مختلط) بدل شدند که به‌نوبهٔ خود، می‌توانند نشانگر فاصلهٔ زمانی، مسافت، یا هرچیز دیگر، که سودمند به‌نظر آید، باشند. سپس، این توابع مجرد، به‌سبب ویژگی‌های ذاتیشان، مانند تناوب، آهنگ تغییر، ماکسیمم و مینیمم، طوری مورد مطالعه قرار گرفتند که، به‌عنوان پدیده‌های مستقل درک شدند و برای استفاده در ساختن مدلی ریاضی، برای پدیده‌های تناوبی آماده شدند. آلفرد نورث وایتهد در مورداین داستان چنین نوشته است: «به‌این ترتیب، مثلثات کاملاً مجرد شد؛ و با مجرد شدن، سودمند شد.»

ممکن است در اهمیت این تصور، که تعمیم و تجرید ریاضیات واقعاً به‌این دلیل سودمند است که ریاضیات را در موقعیت‌هایی فیزیکی که هنوز شناخته نشده، یا حتی هنوز پیش‌بینی نشده است، دارای کاربرد می‌سازد، مبالغه شده باشد. اما، این جنبه از ریاضیات، بیش از حد مورد بی‌توجهی قرار گرفته است و تاریخ ریاضیات، در صورتی که سبب شود شهروندان آینده این جنبه از موضوع را بفهمند، در خدمت هدفی والا به‌کار

گرفته شده است. باید روشن شود که درک این نقش تجرید و تعمیم هدفی است که باید دنبال شود، و راهنمایی برای روندهای آموزش ابتدایی نیست. این بدان مفهوم نیست که آشنایی با موضوعات ریاضی جدید، به‌ویژه در سطح ابتدایی، باید مجرد و کلی باشد؛ بلکه منظور این است که به‌تدریج، که موضوع بسط داده می‌شود، باید دانش‌آموزان را نه تنها به‌درک تعمیم‌ها و تجریدها، بلکه به‌سوی دریافت اهمیت و نقش چنین تعمیم‌ها و تجریدهایی سوق دهیم. یکی از بهترین راه‌های تدریس ماهیت و نقش یک تعمیم و تجرید، دنبال کردن سیر بسط اندیشهٔ تعمیم یافته با جزئیات کامل است.

شهود، استقراء، و قیاس

برای حفظ تعادل، لازم است براهمیت شهود، استقراء، و قیاس در ایجاد و فهم ریاضیات نیز تأکید شود. داستان جالب سریِ نیواسا رامانوجان ممکن است این تصور (و همچنین بین‌المللی بودن ریاضیات) را نشان دهد. رامانوجان نابغهٔ ریاضی هندی عمدتاً، خود آموختهٔ فقیری بود که در سال ۱۸۸۷ به‌دنیا آمد و در سال ۱۹۲۰ درگذشت. داستان او، مانند داستان زندگی گاوس، گالوا، اویلر، ارشمیدس، و بسیاری دیگر، در صورتی که به‌عنوان موضوعی برای مطالعه یا گزارش درکلاس به‌کارگرفته شود، می‌تواند در جلب توجه و ایجاد علاقه، بسیار مؤثر باشد. یکی از نکات جالب در مورد رامانوجان این است که او تقریباً، در جدایی مطلق از ریاضی‌دانان دیگر، بخش‌های بزرگی از ریاضیات را برای خود بسط داد. برخی از این کارها، بد و ناکامل و برخی دیگر حتی نادرست است. اما با وجود این، شهود و تخیل تقریباً بی‌نظیرش، او را به‌بسیاری کشف‌های مهم سوق داد. هاردی، ریاضی‌دان مشهور، وقتی او را با خود به‌انگلستان آورد، چنین نوشت:

«برای آموزش ریاضیات نوین به‌او، چه راهی باید در پیش گرفته می‌شد؟ محدودیت دانش او به‌اندازهٔ عمق آن شگفت‌آور بود... او تمامی نتایج خود را، قدیم یا جدید، درست یا نادرست، با فرایندی آمیخته از استدلال، شهود، و استقراء به‌دست آورده بود، ولی نمی‌توانست توصیفی سازگار از این فرایند به‌دست دهد.

ممکن نبود از چنین شخصی خواسته شود به‌آموزش سیستماتیک، و تلاش برای آموختن مجدد ریاضیات از ابتدا، تن در دهد. همچنین بیم آن می‌رفت که با اصرار ورزیدن در مواردی که برای رامانوجان کسالت‌آور بود، اعتماد به‌نفس، یا قوهٔ شهود او را

درهم شکنم.

جملهٔ احتیاط‌آمیزی که در این جا بیان شده است، نشانگر این واقعیت است که همهٔ ریاضی‌دانان نقش تخیل و شهود را، در رسیدن به‌حدس‌هایی که بعداً باید درستی آن‌ها را آزمایش کنند و در صورتی که، امکان درست بودن حدس وجود داشته باشد، در صدد اثباتش برآیند، می‌دانند. هاردی، داستانی را دربارهٔ گفتگویی با رامانوجان هنگام ملاقات با او در یک بیمارستان نقل کرده است. این داستان نیز نشان می‌دهد که ریاضی‌دان به‌طور طبیعی، تمایل دارد بپرسد: «چه اتفاقی می‌افتد اگر...؟»، تعمیم دهد، و بعد از هراندیشهٔ جدید از خود بپرسد: «بیش از این چه چیزی می‌توانم به‌دست آورم؟ این اندیشه مرا به‌سوی چه اندیشهٔ دیگری هدایت می‌کند؟». داستان این است که هاردی هنگام ملاقات با رامانوجان در بیمارستان گفت که با یک تاکسی به‌شمارهٔ ۱۷۲۹ به‌بیمارستان آمده است و این عدد چندان جالب نیست. رامانوجان جواب داد: «برعکس، عدد بسیار جالبی است؛ این کوچک‌ترین عددی است که می‌توان به‌دو شکل مختلف، به‌صورت مجموع دو توان سوم بیان داشت.» هاردی می‌گوید: «طبیعتاً از او پرسیدم که آیا جواب مسألهٔ متناظر برای توان‌های چهارم را هم می‌داند.»

وابستگی‌های متقابل در ریاضیات

توصیف مختصری که از بسط هم‌زمان هندسهٔ نااقلیدسی توسط یک مجارستانی و یک روس، که هیچ ارتباط یا آشنایی نزدیکی با یکدیگر نداشتند ارائه شد، خود موضوع دیگری را در تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد. اکتشاف هم‌زمان در ریاضیات، که به‌کرّات روی داده است، ماهیت رو به‌رشد و پختگی دانش ریاضی را نشان می‌دهد و نشانگر این واقعیت است که، کشف‌های تازه در ریاضیات غالباً، از کشف‌های قدیم‌تر حاصل می‌شوند، اما این کشف‌های قدیم‌تر غالباً، چنان برای آماده شدن مراحل بعدی ضرورانـد که، با کامل شدن یک مرحلهٔ مقدماتی، چندین نفر به‌طور هم‌زمان گام بعدی را مشاهده می‌کنند. کشف لگاریتم توسط جان نِپر اسکاتلندی و یوبست بورگی سوئیسی، و بسط نمایش هندسی اعداد مختلط توسط کاسپلرویِسل نروژی، ژان روبوت آرگان سوئیسی، و کارل فریدریش گاوس آلمانی، همه تقریباً به‌طور هم‌زمان، مثال‌های دیگری از کشف‌های هم‌زمان و نیز بین‌المللی بودن ریاضیات است.

ریاضیات با اندرکنش بسیاری از وسایل و رهیافت‌های مختلف پیشرفت می‌کند. علی‌رغم آن چه قبلاً در مورد ناکافی بودن بیان صرف اصول موضوع و برهان‌ها نقل شد، روش اصل موضوعی نوین می‌تواند ابزار و محرکی برای گسترش مرزهای خود ریاضیات باشد. مثلاً، وایتهد و راسل در مقدمهٔ اثر مشهور خود به‌نام *اصول ریاضیات* چنین می‌گوید:

«از تلفیق این دو نوع مطالعه (کار ریاضی‌دان‌ها و منطق‌دان‌ها)، دو نتیجه به‌دست می‌آید: (۱) آن چه قبلاً، به‌طور ضمنی یا صریح، اصل موضوع گرفته می‌شد، یا غیرلازم است یا قابل استنتاج؛ (۲) همان روش‌هایی که برای اثبات آن چه اصل موضوع فرض می‌شد به‌کار گرفته می‌شود، نتایج ارزشمندی در زمینه‌هایی مانند اعداد نامتناهی را به‌دست می‌دهند که قبلاً، برای دانش بشری دور از دسترس دانسته می‌شد. پس، دیدگاه ریاضیات، هم با افزودن موضوعات جدید و هم با پیشرفت به‌وادی‌هایی که قبلاً به‌عهدهٔ فلسفه گذاشته می‌شد، گسترش می‌یابد.

این که آموزندهٔ امروزی به‌چه راه‌هایی می‌تواند به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم، در تبیین اصول موضوع لازم، برای پیشبرد یک برهان، یا یافتن حدس‌هایی که از مجموعه‌ای از فرض‌ها ناشی می‌شود شرکت جوید، طی مقالات بسیاری مورد بحث قرار گرفته است. در این گونه فعالیت‌ها لزوماً، نیاز به‌دانش وسیعی از تاریخ ریاضیات نیست. اما، بررسی اصول موضوع اقلیدس و سرچشمه‌های احتمال این اصول، و شکاف‌هایی که به‌سبب استفاده از شکل، در برهان آن‌ها وجود دارد، راهی آموزنده برای شناخت ماهیت و ضرورت دستگاهِ اصل موضوعی است.

استفادهٔ معلم و آموزنده از تاریخ ریاضیات

در این جا، این پرسش مطرح می‌شود که چگونه باید تاریخ ریاضیات را برای رسیدن به‌این هدف‌های دقیقی که در بالا پیشنهاد شده است، یعنی افزایش درک ریاضی؛ رابطهٔ آن با دنیای فیزیکی؛ این که ریاضیات چگونه و چرا به‌وجود می‌آید، رشد می‌کند، بسط می‌یابد، تغییر می‌کند، و تعمیم داده می‌شود؛ جنبهٔ بین‌المللی ریاضیات؛ قابلیت کاربرد تعمیم‌ها، گسترش‌ها انتزاع‌ها؛ و ماهیت ساختار، اصل موضوعی‌سازی، و برهان، به‌کار گرفت.

پاسخی کلی، ساده، و سرراست به‌این پرسش وجود ندارد. سن و پیش‌زمینهٔ ریاضی ـ آموزندگان، و خلاقیت معلم تعیین می‌کند که چه رهیافتی باید به‌کار گرفته شود. می‌توان تاریخچهٔ مختصری را ارائه داد، یا می‌توان با بحثی کوتاه و مقدمه چینی، مسأله‌ای را مانند مسألهٔ مشهوری که توسط جیرولاموکاردانو (یا کاردان) مطرح شده بود، برای آموزندگان مطرح کرد: «دو عدد بیابید که مجموعشان ۱۰ و حاصل ضربشان ۴۰ باشد.» کاردان در مورد این مسأله گفت: «این به‌وضوح ناممکن است.» (چرا؟) اما سپس چنین ادامه داد: «درهرحال، مطابق معمول عمل می‌کنیم.» او با کامل کردن مربع‌ها به‌همان روشی که قبلاً برای مسائل «ممکن» بیان کرده بود، به‌جوابهای $۵+\sqrt{-۱۵}$ و $۵-\sqrt{-۱۵}$ رسید و آن‌ها را اعداد «پیچیده»ای دانست که در شرایط ذکر شده، صدق می‌کنند.

برخی از داستان‌های تاریخی به‌عنوان موضوعاتی برای گزارش، مطالعه، یا برنامه‌های انجمن ریاضی سودمندند. برخی دیگر، دانش‌آموز را تشویق به«اکتشاف» می‌کند. مطمئناً آموزنده‌ای که، دنبالهٔ مربع‌های اعداد صحیح مربوط به‌نمودارهای فیثاغورسی برای اعداد مجسم را دیده است، در این مسیر قرار می‌گیرد که فرمول $(n+۱)^۲=n^۲+۲n+۱$ و این واقعیت، را که مجموع n عدد صحیح متوالی که با ۱ شروع می‌شوند برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، و همچنین این واقعیت را، که تفاضل‌های دوم تابع درجه دومی‌که مقادیرش به‌ازای نمونه‌های یکسان متغیر داده شده است ثابت است، کشف کند. تاریخ، می‌تواند فراتر از محرکی برای مسائل و اندیشه‌ها عمل کند؛ تاریخ ریاضیات به‌آموزندگان کمک می‌کند. تارابطه‌ها و ساختار آن چه را که شبکه‌ای پیچیده و درهم تنیده از هندسه، جبر، نظریهٔ اعداد، توابع، تفاضل‌های متناهی، و فرمول‌های تجربی به‌نظر می‌رسد، درک کند.

دیدگاه تاریخی، معلم را در تعیین این که «ریاضیات نوین» واقعاً چه باید باشد کمک می‌کند. تاریخ نشان می‌دهد که ریاضیات معاصر، آمیخته‌ای است از بسیاری چیزهای قدیمی، مثل شمارش و قضیهٔ فیثاغورس، که هنوز هم مهم است، و مفاهیمی جدیدتر، مانند مجموعه‌ها، اصول موضوع، و ساختار. شاید ارزش روشن‌کننده و متحدکنندهٔ این مفاهیم جدیدتر، بیش از محتوای آن‌ها مهم باشد. اگر یافتن ساختار در یک سیستم قدیمی، درک و گسترش بخشی از ریاضیات را آسان‌تر سازد، اگر نمادگذاری و اصطلاحات جدید، به‌مجتمع سازی و سیستماتیک کردن بخشی از دانش، که قبلاً به‌طور

نامنظم رشد می‌کرده است، کمک کند، آن گاه این درک تازه از ساختار و نمادگذاری، آموزش، یادگیری و کاربرد ریاضیات را آسان‌تر می‌سازد. اغلب (اما نه همیشه)، ممکن است «ریاضیات نوین»، تنها درکی جدید از چند موضوع قدیمی باشد. موضوع مهم، دورانداختن هرآن چه قدیمی است یا ارائهٔ هرچیز تازه نیست، بلکه باید بسط و گذار به‌ساخت‌های جدید از دستگاه‌ها و اندیشه‌های قدیمی را به‌آموزنده ارائه دهیم و همچنین، مفاهیم و دستگاه‌های جدید را، هرجا که مناسب باشد، به‌او معرفی کنیم. داشتن بینشی از بسط (تاریخی) مفاهیم می‌تواند، هم به‌برنامه ریزان آموزشی در انتخاب سرفصل‌ها کمک کند و هم ابزاری باشد در دست معلم برای دادن بینش به‌آموزندگان و برانگیختن علاقهٔ آن‌ها.