گزارش

کنگره بزرگداشت

فضل بن حاتم نی ریزی

۲۸ - ۲۷ مهرماه ۱۳۷۸

نی ریز فارس

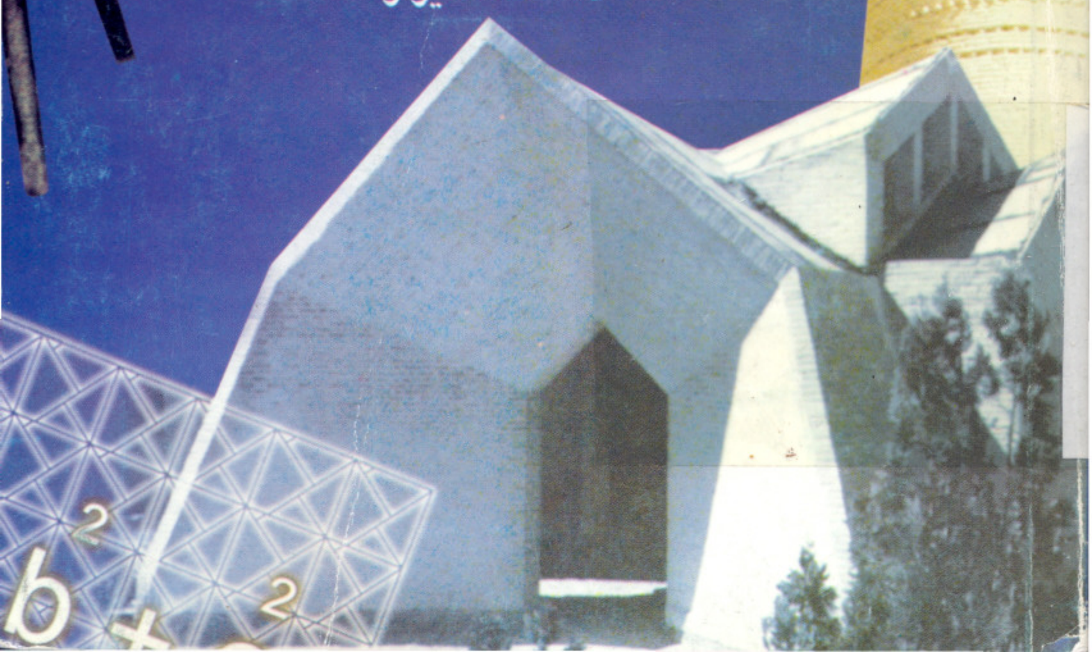
فرمانداری شهرستان نی ریز

با همکاری

ستاد ملی سال جهانی ریاضیات

و

دانشگاه شیراز



تاثیر نی ریزی در غرب

دکتر یان.پ. هوخندایک
از دانشگاه اوترخت (هلند)
ترجمه محمد باقری

۱- مقدمه

ابوالعباس فضل‌بن حاتم نیریزی ریاضیدان و منجمی از شهر نیریز ایران بود که دربغداد کار می‌کرد [۱]. چون او رساله‌ای برای خلیفه المعتضد که از ۲۷۹تا۲۸۹ حکومت‌می‌کرد نوشت، زمان حیاتش باید حوالی سال ۲۹۰ هجری قمری بوده باشد. سوتر [۱۴]،ص[۴۵] ، و به پیروی از او بسیاری از مؤلفان ذکر کرده‌اند که نیریزی در حوالی سال۳۱۰هجری درگذشت. من در مورد این تاریخ شاهدی در منابع دوره اسلامی نیافته‌ام وبعید نمی‌دانم که خود سوتر تاریخ ۳۱۰ را وضع کرده باشد [۲].

نیریزی بر پیشرفت ریاضیات در اروپای سده‌های میانه اثر گذاشته است زیرا شرح اوبر اصول اقلیدس در قرن دوازدهم میلادی (ششم هجری) به‌لاتینی ترجمه شد. در این‌مقاله به بررسی کلی تأثیر نیریزی در اروپای سده‌های میانه و بر تاریخ‌نگاری معاصر ازریاضیات یونان می‌پردازم.

۲ - شرح نیریزی بر اصول اقلیدس

مهم‌ترین اثر ریاضی یونان اصول اقلیدس است که در حوالی ۳۰۰ پیش از میلاد در۱۳ ((مقاله)) تألیف شد [۸]. اقلیدس در این اثر مباحث هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی، تناسب،اعداد، مقادیر گنگ، و هندسهٔ

فضائی را به‌شیوه‌ای منسجم عرضه می‌کند. او در آغازکتاب تعریفها، اصول متعارفی و اصول موضوع را آورده و سپس قضیه‌ها و ترسیمهایی رادر ترتیب منطقی عرضه می‌کند. این کتاب بر تاریخ ریاضیات تا قرن نوزدهم میلادی(سیزدهم هجری) تأثیر عظیمی گذاشته است، هر چند که اقلیدس اصول را به‌عنوان‌متنی برای استفاده همکارانش و نه به‌عنوان کتاب درسی هندسه تألیف کرد. برخی ازمباحث اصول دشوار یا مبهم هستند.

در همان یونان باستان، شرحهایی بر اصول نوشته شد. کتاب اصول طی قرنهای دوم وسوم هجری (نهم میلادی) به‌عربی ترجمه شد و نیریزی یکی از نخستین ریاضیدانان‌دورهٔ اسلامی بود که شرحی بر (دست کم) ده مقالهٔ نخست این اثر نوشت. بخش اعظم‌شرح نیریزی بر شش مقالهٔ نخست اصول به‌صورت نسخهٔ خطی عربی در کتابخانهٔ لیدن(هلند) و همراه با ترجمهٔ عربی اصول منسوب به حجّاج‌بن مطر [۲] موجود است. در این‌نسخهٔ خطی تعریفها، اصول موضوع، اصول متعارفی و قضیه‌های اصول و به‌دنبال آنها شرح نیریزی آمده است. این نسخهٔ خطی عربی ناقص است و تنها تا آغاز مقالهٔ هفتم‌می‌رسد و بخش مهمی از شرح مقالهٔ اول را ندارد.

۳

شرح نیریزی را گراردوی کرمونایی (حدود ۱۱۱۴-۱۱۸۷ میلادی) به‌لاتینی ترجمه‌کرد. سه نسخهٔ خطی از این ترجمه به‌جا مانده است که امکان بازیابی افتادگیهای متن‌عربی را فراهم می‌آورد [۵]، [۱].

در مورد شرح نیریزی بر مقالهٔ دهم اصول راجع به‌نظریهٔ مقادیر گنگ سردرگمی‌زیادی وجود دارد. تاریخنگاران ریاضیات بنابه‌دلایلی که در پی می‌آید در مورد مؤلف‌بخش دوم این شرح مقالهٔ دهم

[۵ ، ص۳۸۶-۲۵۲] تردیدهایی دارند. در سال ۱۹۰۲ بیورنبو کشف کرد که نسخهٔ خطی لاتینی دیگری شامل همین متن به عنوان بخش دوم‌شرح است[۳، ص۷۱] ، نام مؤلف در آنجا ذکر نشده بود ولی آن نسخه لاتینی با ((آباکوس)) شروع می‌شود. سوتر براساس این کلمهٔ نخست حدس زد که مؤلف آن‌نیریزی نیست بلکه شخصی به‌نام ابوبکر محمدبن عبدالباقی بغدادی متولد ۴۴۲ ومتوفای ۵۳۵هجری باشد [۱۶، ص۲۳-۲۲] ، سوتر سپس پژوهشی دربارهٔ این بخش دوم با عنوان گمراه‌کنندهٔ ((در باب شرح محمدبن عبدالباقی بر مقاله دهم اصول)) منتشرکرد [۱۷] [۴] . به‌نظر من سزگین در [۷، جلد۵، ص۳۸۹-۳۸۸] بدرستی این انتساب را ردکرده و گفته است که محمدبن عبدالباقی متأخرتر از آن می‌زیست که کتابش بتواندبه‌اسپانیا برسد و به‌دست گراردوی کرمونایی به‌لاتینی ترجمه شود. اخیر بوزار < پژوهشگر هلندی > ویرایش تازه‌ای از متن ترجمهٔ لاتینی بخش دوم این شرح منتشرکرده [بوزار، ترجمه لاتینی، شرحی عربی بر مقاله دهم اصول اقلیدس،Medievalstudies سال ۵۹ (۱۹۹۷)، ص۱۹-۱۱۰] و آن را تألیف یوحنّا القسّ [۷، جلد۵،ص۲۹۸؛ قربانی، زندگینامه، ص۵۲۰-۵۲۱] که در اوایل قرن چهارم هجری می‌زیست،دانسته است. او رسالهٔ عربی کوتاهی دربارهٔ مقادیر گویا و گنگ دارد < با عنوان مقاله‌فی‌المقادیر المنطقه والصمّ > که البته غیر از شرحی است که بوزار آن را ویرایش کرده‌است. بدین‌ترتیب هنوز در مورد مؤلف بخش دوم شرح مقالهٔ دهم نمی‌توان اظهارنظرقطعی کرد . [۵]

نمی‌دانم که آیا نیریزی مقاله‌های یازدهم تا سیزدهم اصول را که دربارهٔ هندسهٔ فضائی است شرح کرده است یا نه.

۳ - ارزش تاریخی شرح نیریزی

نیریزی شرح خود را به‌این قصد نگاشته است که دستیابی به‌محتوای اصول را برای‌خواننده آسانتر کند و مجموعه‌ای از مطالب جالبی که در سایر شرحهای اصول یافته بوددر آن بگنجاند. این افزوده‌ها عبارتند از تعریفهای دیگری برای آنچه اقلیدس تعریف‌کرده است، بحثهایی دربارهٔ ساختار قضیه‌های هندسی، ((اثباتها)) یی برای برخی از اصول‌موضوع اقلیدسی، یادداشتها یا صورتهای دیگری برای قضیه‌های اصول و مانند آن.مهم‌ترین منابع او عبارت بودند از دو شرح اصول تألیف هرون اسکندرانی (قرن اول‌میلادی) [۶] و سمپلیکیوس (قرن ششم میلادی) [۷]

متن یونانی این شرحها گم شده است [۸].

نیریزی از شرح سیمپلیکیوس ارجاعهایی به ریاضیدانان یونانی زیر را اخذ کرد:

* ابتینیاتوس : مقاله اول، اصل موضوع ۵؛ مقدمات قضیهٔ ۲۹ مقاله اول؛
* اغانیس: مقالهٔ اول، تعریف ۲۳ (خطهای موازی)؛ مقدمات قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ اول؛

ارشمیدس (متوفای ۲۱۲ پیش از میلاد) [۹] : مقاله اول، تعریفهای ۴، ۲۰ مکرر؛

*دیودوروس (قرن اول میلادی) [۱۰] : مقاله اول، اصل موضوع ۵؛ مقدمات قضیه ۲۹مقاله اول؛

* هرمیدس: مقاله اول، تعریفهای ۱،۲،۵،۷؛
* دیگران: مقاله اول، تعریفهای ۱،۲،۴،۷،۸؛
* پاپوس (حدود ۳۰۰ میلادی) [۱۱] : مقاله اول، اصول متعارفی؛
* افلاطون (۴۲۷ -حدود ۳۴۷ پیش از میلاد) [۱۲] ؛ مقاله اول، تعریف ۴؛
* پوسیدونیوس (متوفای حدود ۵۰ پیش از میلاد) [۱۳] : مقاله اول، تعریف ۱؛
* بطلمیوس (حدود ۱۵۰ میلادی) [۱۴] : مقدمات قضیه ۲۹ مقاله اول.

از وجود سه هندسه‌دان به‌نامهای ابتینیاتوس، اغانیس [۱۵] ، و هرمیدس تنها از طریق نقل‌قولهای موجود در شرح نیریزی اطلاع داریم و نامهای دقیق یونانی آنها مشخص نیست. تنها دو شرح دیگر از مؤلفان یونانی برجای مانده است: شرح پروکلوس بر مقالهٔ اول اصول که متن اصلی یونانی آن موجود است [۱۲] [۱۶] ، و شرح پاپوس اسکندرانی برمقالهٔ دهم اصول که در ترجمهٔ عربی به‌جا مانده است [۱۱]. چون نیریزی بخشهای عظیمی از شرحهای سیمپلیکیوس وهرون را حفظ کرده است، شرح او از لحاظ تاریخ‌ریاضیات یونان بسیار مهم است. از این‌رو، شرح نیریزی در اواخر قرن ۱۹میلادی(۱۳هجری) توجه تاریخنگاران اروپایی ریاضیات را به‌خود جلب کرد. این امر موجب‌انتشار متن عربی [۲] و نخستین ویرایش ترجمه لاتینی مربوط به‌سده‌های میانه [۵] شد.

نیریزی همچنین صورت جالب دیگری برای برهان قضیه فیثاغورس (اصول، درنسخه عربی: قضیه ۴۶ مقاله اول؛ در متن یونانی: قضیه ۴۷ مقاله اول) از ثابت‌بن قره‌عرضه کرده است. در مقایسه با آنچه نیریزی

از منابع دیگر آورده، افزوده‌های خود او نسبتاً اندک است. این افزوده‌ها به‌قرار زیرند:

* او به برخی قضیه‌ها مثالهای عددی افزود تا درک آنها برای خواننده آسانتر شود.

مثال: در قضیه ۴ مقاله دوم آمده است: اگر (پاره) خطی به دو بخش تقسیم شود،مربع کل خط برابر است با (مجموع) مربعهای آن دو بخش به‌علاوه دو برابر مستطیل حاصل از آن دو بخش. نیریزی این را با مثالی که در آن کل خط ۱۰ و بخشهای آن ۷ و ۳ هستند نشان می‌دهد که در آن $۳\times۷\times۲+۳\times۳+۷\times۷=۱۰\times۱۰$، [۲، بخش ۲، جزوه۱،ص۲۱] مثالهای دیگر در مقالهٔ دوم، قضیه‌های ۱، ۲، ۳، ۵؛ مقالهٔ پنجم، تعریفهای ۹ و۱۰؛ مقاله ششم، قضیه ۲۶ (در متن یونانی= ۲۵)، ۲۸ و ۲۹ آمده است. در شرح مقالهٔدهم نیز مثالهای عددی زیادی هست که نمی‌دانیم از نیریزی است یا نه.

* او درباره برهانهای اصول اظهارنظرهایی کرده است: مقاله سوم، قضیه‌های ۱۵ و۱۹؛ مقاله چهارم، قضیه‌های ۵، ۶ و ۱۰؛ مقاله پنجم، تعریفها، قضیه‌های ۱، ۲، ۲۱؛ مقاله‌ششم، تعریفها، قضیه‌های ۴، ۷، ۱۸، ۲۵، ۳۲ طبق شماره‌گذاری نسخه خطی (مطابق باقضیه‌های ۴، ۷، ۱۹، ۲۳، ۳۱ در شماره‌گذاری ویرایش یونانی، نگاه کنید به [۸ ، جلد۲] .

برخی از این اظهارنظرها ساده‌اند، ولی شرح نیریزی بر مقالهٔ پنجم عمیق‌تر است. اودر آنجا راجع به تعریفی از $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ بحث می‌کند که با نظریه امروزی کسرهای مسلسل‌مرتبط است[۲، بخش ۳، جزوه۲، ص۱۳-۱۰] احتمالاً این موضوع در زمان نیریزی‌مورد پژوهش جدی بود

و نیریزی تنها بخشی از آن را دریافت (ولی ماهانی آن را به‌طورکامل درک کرد).

* بخشهایی در این شرح هست که منشأ آنها نامعلوم است، مثلاً اثبات مستقیم‌قضیه‌های ۸، ۹ و ۱۴ مقاله اول؛ تقسیم برهان قضیه ۳۴ مقاله سوم به شش حالت، وهمانند اینها. شاید این بخشها افزوده نیریزی باشد، یا نیریزی آنها را از منابع قدیمی‌ترگرفته است، یا حتی شاید بعدها کسی آنها را طی بازنویسی متن اضافه کرده باشد. گاهی‌نیریزی برهانی عرضه می‌کند ولی می‌گوید که مؤلف آن را نمی‌شناسد (قضیه‌های ۲۵ و۲۶ مقاله اول). تعیین میزان دقیق سهم خود نیریزی مستلزم پژوهشهای بیشتری است.

۴ - یک مثال

اکنون به‌تشریح قضیهٔ جالبی از شرح هرون اسکندرانی می‌پردازم که به‌جای ماندن آن‌را مدیون نیریزی هستیم. این قضیه مربوط است به برهان اقلیدس برای قضیهٔ فیثاغورس‌که نخست آن را به‌اختصار می‌آوریم [۸ ، جلد۱، ص۳۵۰-۳۴۹] .

اقلیدس برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس مثلث‌قائم‌الزاویه ABG را درنظر می‌گیرد و مربعهای ABEZ،AGHT و BGPD را مطابق شکل ارسم می‌کند. اقلیدس می‌گوید که BA وAT بریک خط راست واقعند، و GAوAZ نیز بر یک‌خط راست واقعند. همچنین عمودAKL را بر BG وارد می‌کند و خطهای راست EG و AD رامی‌کشد. اکنون ثابت

که مساحت مربع ABEZ با مســـاحت متــوازی‌الاضــلاع KLDB بــرابر اســـت: چــون EB=BA ، GB=BD ، و LEBG=LABD ، مثلثهـــای EBG و ABD متســـاویند و بنابراین مساحتهایشان برابر است.چونZAG باEB موازی است، مربع ABEZ دو برابر مثلث EBG است.

چونAL با BD موازی اســـت، متوازی‌الاضــلاع KLDB دو برابرمثلث ABD است. بنابراین مساحـــت مربعABEZ با مساحت متوازی‌الاضلاع KLDB برابر است.

سپس پاره‌خطهای AP وBH را رسم می‌کند و می‌گویـــد که به روش مشابهی می‌توان‌ثابت کرد که مساحت مربـــع AGHT با مساحت متوازی‌الاضلاع KLPG برابـــر اســـت.

پس‌مجموع مربعهای ABEZ وAGHT بـــا مربـــع BGPD برابر است. این همان قضیهٔ فیثاغورس است.

از شکل ۱ چنین برمی‌آیـــد کـــه پاره‌خطهـــای BH وGE وAK از نقطـهٔ مشترکی‌می‌گذرند. هرون در شرح خود ثابت می‌کند کـــه واقعـاً چنیـــن است. در ترجمه قضیه هرون‌که به‌نقل از نیریزی[۲، بخـــش ۱، ص۱۸۲- ۱۸۵] در زیر می‌آید، همه جا منظور از ((خط)) همان پاره خط راســـت است و افزوده‌های خود را درون پرانتز آورده‌ام.

۱۷

(شکل ۲) اکنون که این قضیه‌های مقدماتی را آوردیم ، فرض‌می‌کنیم که در مثلث ABG زاویـــهٔ A قائمه است .

رویBG مربع GD، روی AB مربع ABEZ و روی AG مربع AGHT بنا شده‌است. از نقطهٔ A خط AKL موازی با BD رسم شده است. خط EGرسم شده و خط AL را در نقطهٔ M قطع کرده است. خط HM رسم شده است. سپس نقطهٔ M به‌نقطهٔ B وصل شده است.می‌گویم که خط MB در راستای خط HM است.

(برهان:) خطهای EB و HG را مستقیماً امتداد می‌دهیم تایکدیگر را در نقطه N قطع کنند و خطهای EZ و HT را امتدادمی‌دهیم تا یکدیگر را >[18] در نقطه S قطع کنند.

از نقطهٔ M خط OMF را موازی با خط SE و خط CMQ را موازی با خط ZG می‌کشیم، همان‌طور که در برهان (قضیهٔ) ۳۱ نشان داده شده‌است. خطهای SA و TZ را می‌کشیم. خط TA با خط AG و خط ZA با خط AB برابر است. پس دو خط BA و AG با دو خط ZA و AT برابرند و زاویهٔ BAG با زاویهٔ ZAT برابر است. پس قاعدهٔ BG و قاعدهٔ TZ طبق برهان (قضیهٔ) ۴[19] برابرند و زاویه‌های دیگر با زاویه‌های دیگر برابرند، بنابراین زاویهٔ ABG با زاویهٔ TZA برابر است. اما زاویهٔ ABG با زاویهٔ GAK برابرست زیرا AK عمودی‌در مثلث قائم‌الزاویه ABG است. پس زاویهٔTZA با زاویهٔ GAK برابرست . زاویهٔ TZA با زاویهٔ SAZ برابرست زیرا

درمتوازی‌الاضلاع SA دو قطر SA و TZ یکدیگر را در نقطه X قطع‌می‌کنند، بنابراین X با خط AX مساوی است، پس زاویهٔ SAZ بازاویهٔ GAK برابرست. زاویهٔ SAG را مشترک در نظر می‌گیریم،پس مجموع دو زاویه SAZ و SAG با مجموع دو زاویهٔ MAG وGAS برابرست. اما طبق برهان (قضیهٔ) ۱۳ مجموع دو زاویه SAZ و SAG برابر با دو قائمه است; پس مجموع دو زاویه SAG و GAM برابر با دو قائمه است. پس طبق برهان (قضیهٔ) ۱۴، خط SAM مستقیم است و این قطر متوازی‌الاضلاعSM است. پس‌طبق برهان (قضیه) ۴۳، متمّم[20] AC با متمم AO برابرست. سطح AM را مشترک درنظر می‌گیریم، پس سطح MT با سطح MZ برابراست. همچنین، سطح ZN متوازی‌الاضلاع است، قطر آنEMG است و روی دو ضلعش متوازی الاضلاعهای ZM و MN قرارگرفته‌اند و این دو متمّم هستند. پس متمّم ZM با متممMN برابرست. بنابراین، سطح MN با سطح MT برابر است. پس طبق‌برهان سومین لم مقدماتی این قضیه[21]، BMH خط راست است، واین چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

این برهان قابل‌توجه است زیرا در آن نظریهٔ‌تناسبها و مثلثهای متشابه از مقالهٔ پنجم و ششم‌اصول به‌کار نرفته است.[۲۲] پس هرون شرح خودرا نه برای ریاضیدانان کامل، بلکه برای‌دانش‌آموزان نوشته است.

۵ - تأثیر نیریزی بر آلبرتوس کبیر

ترجمهٔ لاتینی شرح نیریزی بر اصول ظاهرأدر سده‌های میانهٔ رواج چندانی نداشته‌است. اما دو عالم از میانهٔ قرن سیزدهم میلادی (هفتم هجری) به‌نامهای آلبرتوس کبیر وراجربیکن به مطالعهٔ آن پرداختند. ابتدا به‌سراغ آلبرتوس کبیر می‌رویم.

آلبرتوس کبیر (آلبرتوس ماگنوس) در حوالی سال ۱۲۰۰ میلادی (۶۰۰ هجری) درآلمان به‌دنیا آمد. او در ایتالیا تحصیل کرد و عضو فرقهٔ دومینیکی شد. در سالهای۱۲۴۱-۱۲۴۷ میلادی در پاریس مقیم بود و سفرهای زیادی به‌آلمان کرد. بین سالهای۱۲۵۰ و ۱۲۷۰ آثار زیادی نوشت که در آنها به‌بحث دربارهٔ فلسفهٔ ارسطویی و علوم‌یونانی و اسلامی پرداخت. او پیرو چشم و گوش بستهٔ ارسطو نبود و آثارش شامل‌فهرستی از اشتباههای ارسطوست. حاصل فعالیت آلبرتوس کبیر، کاهش دشمنی عالمان‌مسیحی با علوم یونانی و اسلامی بود. در ۱۶ دسامبر ۱۹۳۱ پاپ پیوس یازدهم آلبرتوس‌کبیر را قدّیس خواند و در سال ۱۹۴۱ کلیسای کاتولیک رومی او را حامی همهٔ دانشجویان علوم طبیعی اعلام کرد [۶ ، جلد۱، ص۹۹-۱۰۳، ترجمهٔ فارسی، جلد۱،ص۱۹۰-۱۹۴] .

البرتوس کبیر کتابی در هندسه نوشت که اساسا تفسیری بر مقاله‌های اول تا چهارم‌اصول همراه با مقدمه‌های فلسفی و شرح ریاضی است. در این بخش، از ویرایش وتحلیل مقالهٔ اول هندسه به‌وسیلهٔ پل تامرز از شهر نایمخن (هلند) [۲۰] استفاده کرده‌ام.تامرز اکنون ویرایش کاملی از هندسهٔ آلبرتوس کبیر را برای‌انتشار آماده می‌کند.

کتاب هندسه شامل بحثهای فلسفی خود آلبرتوس دربارهٔ ماهیت ریاضیات و جایگاه‌آن بین علوم دیگر است. از این لحاظ هندسه کار بدیعی است. آلبرتوس در بسیاری ازمطالب فنی ریاضی از نیریزی تأثیر پذیرفته است. [۲۳]

مثال زیر این امر را روشن می‌کند. در اینجا ترجمهٔ تفسیر آلبرتوس [۲۰، جلد۲،ص۹۸-۹۹] را از قضیه هرون که ترجمه‌اش پیشتر آورده شد، آورده‌ایم. حروف ذکرشده مطابق حروف‌گذاری شکل۲ است. با مقایسه دو ترجمهٔ [۲۴] ، پی می‌برد که چگونه‌آلبرتوس متن نیریزی را اصلاح کرده است. در این مورد همچنین نگاه کنید به تحلیل‌عرضه شده در [۲۰، جلد۱، ص۳۱۵-۳۱۹] در برهان زیر به لم‌های مقدماتی اشاره‌شده است که آسان هستند و بنابراین آنها را نیاورده‌ام.

(شکل۲) اکنون (قضیهٔ) پنجم هرون عرضه می‌شود و این‌چیزی است که اقلیدس در برهان قضیهٔ ۴۶ فرض کرده است،بدین‌معنی که اگر مربعهایی روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌رسم شود، دو خط شامل یک ضلع مربع در زاویهٔ قائمه (به‌عنوان‌نقطهٔ انتهایی) در همان

راستای ضلعهایی از مثلث که شامل همان‌زاویه (یعنی قائمه) هستند، خواهند بود. [25] زیرا فرض کنید ABGمثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ قائمه BAG باشد. روی همهٔ ضلعهامربع بنا می‌کنیم، مربع روی ضلع BG که مقابل زاویهٔ قائمهٔ (A) است را BGPD ، مربع روی ضلع AG را AGTH و مربع روی AB را ABZE می‌گیریم. اکنون می‌گویم خط AT از مربع AH درراستای خط AB از مثلث ABG است، و به‌همین ترتیب، خط AZ از مربع AEدر راستای خط AG از مثلث ABG است.

از نقطهٔ A به‌سوی خط PD از مربع GD خطی موازی باBD طبق (قضیهٔ) ۳۱ رسم می‌کنم. این خط طبق (قضیهٔ) ۳۲ [26] ، با ضلع GPهم موازی خواهد بود، آن را ALمی‌گیریم، و این خط قاعدهٔ مثلث ABG را در نقطهٔ K به‌طور قائم‌قطع خواهد کرد . سپس خطهای BH وGE را رسم می‌کنم وخطهای Ht و EZ را امتداد می‌دهم تا در نقطهٔ S یکدیگر را قطع‌کنند. به‌همین ترتیب خطهای Hgو EB را امتداد می‌دهم تا در نقطه Nیکدیگر را قطع کنند. خط LKA را از طرف A تا Sامتداد می‌دهم، [27] و این (خط) خطهای GE و H را درنقطهٔ M قطع‌می‌کند [28] که در سطح (یعنی درون) مثلث ABGواقع است. نقاط T و Z را با خط TZ وصل می‌کنم

و دو خط می‌کشم، یکی موازی با TAB که آن را OMF می‌گیرم و دیگری موازی با ZAG که آن را CMQ می‌گیرم. بنابراین می‌گویم: چون خطهای Ta و AG ضلعهای یک‌مربعند، طبق (قضیهٔ) ۴۵ برابرند، و به‌همین دلیل خطهای ZA و ABبرابرند؛ پس دو خط AG و AB با دو خط AT و AZ برابرند.زاویهٔ BAG طبق (قضیهٔ) ۱۵ با زاویه TAZ برابرست [29]. پس طبق(قضیهٔ) ۴ دو مثلث ABGو TAZ (ا ز لحاظ مساحت) برابرند وزاویهٔ ABG با زاویهٔ TZA و زاویه AGB با زاویه ZTA برابرست.اما طبق لم اخیر [30]، زاویهٔ ABG با زاویه GAK برابرست، پس زاویهٔ TZA با زاویه GAK هم برابرست. در ادامه می‌گویم که‌متوازی‌الاضلاع SA به‌وسیلهٔ دو قطر گذرنده از X، یعنی(قطرهای) AXS و TXZ که طبق لم دوم نصف شده‌اند، تقسیم‌شده است، پس خط XZ با خط XAبرابرست. پس براساس‌بخش اول (قضیهٔ) پنجم زاویه‌های مجاور به‌قاعده یعنی XZA و XAZ برابرند. ولی (نشان داده شد که) زاویه XZA با زاویه GAK است، پس زاویه XAZ با زاویه GAK برابرست.

طبق (قضیهٔ) ۱۳ ثابت شد که زاویه‌های XAZ و SAG برابر بادو قائمه‌اند. اما زاویه‌های GAK و SAG با همان (دو قائمه)برابرند زیرا (به زاویهٔ SAG از هر دو طرف دو زاویه برابر افزوده‌شده است، پس خود آنها با دو قائمه

برابرند. پس طبق (قضیهٔ) ۱۴خط SAMKL یک خط راست است [۳۱]. اما این قطری ازمتوازی‌الاضلاع SM است که متممهایش Ca و OA هستند، پس‌طبق (قضیهٔ) ۴۳ آنها برابرند. اگر مساحت AM به هر دو افزوده‌شود، (مجموعها) همچنان برابر خواهد بود، پس ZM با TM برابراست. اما دوباره متوازی‌الاضلاع ZN را درنظر بگیرید که قطرش GE و متمم آن حول قطر روی ضلع MN ،. ZM و روی ضلع دیگر MN است، پس طبق (قضیهٔ) ۴۳، آنها برابرند [۳۲]. اما (نشان داده شدکه ZM با TM برابرست، پس MN با TM هم برابر است. اماا‌کنون متوازی‌الاضلاع HB به‌قطر MB [۳۳] را درنظر بگیرید که‌به‌دو متوازی‌الاضلاع برابر یعنی TM و MN تقسیم شده است وهمان قطر آن را تقسیم کرده است. بنابراین، طبق لم قبلی [۳۴]، این‌قطر یک خط راست است، پس خط BMH یک خط (راست)است [۳۵]. به‌همین روش می‌توان نشان داد که خط GME یک خط راست است [۳۶]. همچنین زاویهٔ BAG از مثلث ABG قائمه است.به‌همین ترتیب، زاویه TAG طبق (قضیهٔ) ۴۵ قائمه است زیرا زاویه‌یک مربع است، پس طبق (قضیهٔ) ۱۴ خطهایTA و AB که از نقطهٔ A به دو سمت مختلف خارج می‌شوند، یک

خط(راست) هستند.به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که ZA و AGیک خط (راست)هستند، و بـــه‌این روش آنچـــه در برهان اقلیدس خواســـته شـــده اســت،می‌توانــد اثبــات شود [۳۷]. این همان چیزی اســـت کـــه می‌خواســتیم‌ثابت کنیم. اما بدان که هیچ یک از این قضیه‌ها بـــرای برهـــان اقلیدس‌ضروری نیست، و آنها تنها به‌خاطر لذت مطالعـــه افزوده‌شده‌اند... [۳۸].

آلبرتوس در متن نیریزی اصلاحاتی اعمـــال کـــرد ولـــی نکـــاتی کـــه در پانویسها آورده‌ام‌نشان می‌دهد که او از نکته اصلی قضیهٔ هـــرون بکلـــی غافل ماند. تامرز موارد دیگری را هم‌ذکر می‌کند که در آنهـــا آلـــبرتوس شرح نـــیریزی را درســـت درک نکـــرده اســـت [۲۰ ، ص۱۹۱،۲۴۶، ۲۴۸، ۲۸۶-۲۸۷، ۳۱۹، ۳۲۰]. روشن است که آلـــبرتوس از آمـــوزش کـــافی درریاضیات برخوردار نبود، احتمالاً به‌دلیل اینکه دسترســـی بـــه‌چنین آموزشی در زمان اودشوار یا ناممکن بود. آلبرتوس در آغاز دوره جـــذب ریاضیات در غرب می‌زیست که‌سطح دانـــش ریاضیـــات در دانشـــگاهها پایین بود.

۶ - تأثیر نیریزی بر راجر بیکن

راجر بیکـــن در حوالـــی ســـال ۱۲۱۵میـــلادی (۶۱۲ هجـــری قمـــری) در انگلستان به‌دنیاآمد. او در آکسفورد تحصیل کرد و بین سالهای ۱۲۴۱ و ۱۲۴۶ میلادی در پاریس تدریس‌می‌کرد، بنـــابراین محتمـــل اســـت کـــه

شخصاً با آلبرتوس کبیر آشنا بوده باشد. در حوالی سال ۱۲۵۷ میلادی عضو فرقه فرانسیسی شد. او از اینکه مردم آلبرتوس کبیر را دارای مقامی‌هم‌ردیف ارسطو، ابن‌سینا و ابن‌رشد می‌دانستند ناخرسند بود. راجربیکن در سال ۱۲۹۲میلادی در گذشت [۶ ، جلد۱، ص۳۷۷-۳۸۵؛ ترجمه فارسی، جلد۳،ص۳۰۶-۳۱۴] .

راجر بیکن هم‌مانند آلبرتوس کبیر آثار زیادی نوشت که به‌رواج علوم یونانی واسلامی در اروپای غربی کمک کرد. راجر بیکن شیفتهٔ ریاضیات بود ولی آشنایی او باریاضیات حتی کمتر از آلبرتوس کبیر بود. او خلاصه‌ای از هندسه تألیف کرد و آن را درپایان کتاب خود به نام کلیات ریاضی (Communia Mathematica) افزود. این خلاصه راامولانت ویرایش و به‌انگلیسی ترجمه کرده است [۹].

راجر بیکن در این خلاصه پنج بار از نیریزی نام می‌برد. همچنین چند برهان ساده ازشرح نیریزی را نقل می‌کند و بحثی دربارهٔ هندسهٔ نظری و عملی را که نیریزی ازسیمپلیکیوس گرفته است می‌آورد.

پس شرح نیریزی بر راجر بیکن و آلبرتوس کبیر اثر گذاشت، به‌این معنی که به‌وسیلهٔ آنها خوانده و مطالعه شد و آلبرتوس کبیر اصلاحاتی در آن اعمال کرد. با این حال، نه‌راجر بیکن و نه آلبرتوس کبیر نتوانستند محتوای آن را به‌تمامی درک کنند.

۷ - نتیجه‌گیری

چنان که دیدیم، تاریخنگاران اروپایی در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم شرح‌نیریزی را به‌خاطر اهمیتش در بررسی تاریخ ریاضیات یونان مطالعه کردند. اخیراً تاریخنگاری به‌نام پل تامرز ترجمه لاتینی شرح مقاله‌های ۱ تا ۴ را در ارتباط با آلبرتوس‌کبیر مطالعه کرده است.

بوزار نیز ترجمهٔ لاتینی گراردوی کرمونایی را با ترجمهٔ لاتینی‌اصول اقلیدس و با ترجمه لاتینی متأخر از متن عربی شرح نیریزی مقایسه کرده است[۴].کانون توجه همهٔ این پژوهشها سنت ریاضیات یونانی یا لاتینی است.

جالب خواهد بود که بدانیم نیریزی چگونه منابع خود را اصلاح یا انتخاب کرد، کدام‌بندها را خود او افزود، و اینکه آیا بخش آخر ترجمهٔ لاتینی شرح نیریزی بر مقالهٔ دهم واقعاً از اوست یا نه. شاید با تحلیل تاریخی متن عربی بتوان به‌این سؤالها پاسخ گفت.شرح نیریزی بر اصول اقلیدس مهم است، اما در حال حاضر به‌درستی معلوم نیست که‌کدام بخشهای آن نگاشته خود نیریزی است.

پی نویسها

۱- برای اطلاع بیشتر درباره نیریزی نگاه کنید به[۷ ، جلد۵، ص۲۸۳-۲۸۵; جلد۶، ص۱۹۱-۱۹۲;جلد۷، ص۱۵۶، ۲۶۸] ، [۶ ، جلد۱۰، ص۵-۷، [۱۳، ص۵۱۳-۵۱۸] .

۲- سوتر در ترجمهٔ آلمانی فصلی از الفهرست[۱۵، ص۶۷] می‌گوید: ((من اطلاعات بیشتری دربارهٔزندگی او نیافته‌ام، اما چون کتابی برای المعتضد نوشته، باید در حوالی سال ۹۰۰ (میلادی = ۲۹۰ قمری)،همزمان با ثابت (بن قره) زیسته باشد.))

۳- نام مترجم در نسخه‌های خطی لاتینی نیامده است ولی شرح نیریزی جزو فهرستی از ترجمه‌های‌گراردوی کرمونایی آمده است، نگاه کنید به [۵ ، ص viii] ، [۳، ص۷۱] .

۴- مقاله سوتر مهم است زیرا شامل تصحیحات بسیاری در مورد متن ویراستهٔ کورتزه است.

۵- اشاره‌ای به‌نام ریاضیدانی غیر از نیریزی وجود دارد، ولی این اشاره در بخشی از شرح آمده که سوترآن را اصیل می‌داند: ((دیاخاسیموس (Diachasimus) می‌پرسد: نمی‌دانم چرا آناریسیوس (نیریزی) این راافزوده بود..)).[۵ ، ص۲۳۲] . پس تحریری از متن که به لاتینی ترجمه شد احتمالاً حاوی افزوده‌هایی از دیگرریاضیدانان دورهٔ اسلامی بود. هویت ((دیاخاسیموس)) مشخص نشده است [۱۸].

۶- در مورد هرون نگاه کنید به [۶ ، جلد۶، ص ۳۱۰-۳۱۵] .

۷- در مورد سیمپلیکیوس نگاه کنید به[۶ ، جلد۱۲، ص۴۴۰-۴۴۳] .

۸- نیریزی افزوده‌های هرون را به‌قضیه‌های زیر از اقلیدس ذکر کرده است: مقالهٔ اول: قضیه‌های ۱، ۳۵،۱۱، ۳۸، مقالهٔ اول: قضیه ۴۶ (در متن یونانی قضیهٔ ۴۷)، مقالهٔ اول: قضیه ۴۷ (در متن یونانی قضیه ۴۸)؛مقاله دوم: قضیه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳؛ مقالهٔ سوم: تعریفها، مقالهٔ سوَم: قضیه‌های۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۴، ۳۱؛ مقالهٔ چهارم: تعریفها، مقالهٔ چهارم: قضیه‌های ۱، ۱۵،۳، ۱۶؛ مقالهٔ پنجم: تعریفها؛ مقالهٔ ششم: قضیه ۱۸ (در متن یونانی قضیه ۱۹)؛ مقالهٔ هفتم: قضیهٔ ۳؛ مقالهٔ هشتم: قضیه ۲۵. نیریزی تنها در مورد مقاله اول اصول از سیمپلیکیوس نام می‌برد، یعنی در همهٔ تعریفها،اصول موضوع، اصول متعارفی، مقدمهٔ پیش از اولین قضیه[۲ ، بخش۱، ص۴۱] ، و در ((اثبات)) اصل توازی‌اقلیدس پیش از قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ اول.

۹- در مورد ارشمیدس نگاه کنید به [۶ ، جلد۱، ص۲۱۳-۲۳۱] .

۱۰- در مورد دیودوروس نگاه کنید به [۱۰ ، جلد۲، ص۸۴۰-۸۴۱] .

۱۱- در مورد پاپوس نگاه کنید به [۶ ، جلد۱۰، ص۲۹۳-۳۰۴] .

۱۲- در مورد افلاطون نگاه کنید به [۶ ، جلد۱۱، ص۲۲-۳۱] .

۱۳- در مورد پوسیدونیوس نگاه کنید به [۶ ، جلد۱۱، ص۱۰۳-۱۰۶] .

۱۴- در مورد بطلمیوس نگاه کنید به [۶ ، جلد۱۱، ص۱۸۶-۲۰۶] .

۱۵- اغانیس احتمالاً معاصر سیمپلیکیوس بود. او را نباید با جمینوس (Geminus) (حدود ۷۰ پیش ازمیلاد) یکی دانست، نگاه کنید به [۶ ، جلد۵، ص۳۴۴-۳۴۷] .

۱۶- شرح پروکلوس به عربی ترجمه نشد و نیریزی از آن اطلاعی نداشت.

۱۷- هرون سه قضیهٔ مقدماتی می‌افزاید که من ترجمهٔ آنها را در اینجا نمی‌آورم.

۱۸- بستورن و هایبرگ عبارت اخیر را درون پرانتز گوشه‌دار افزوده‌اند تا معنای ریاضی درست باشد.

۱۹- این ارجاعها همواره به مقالهٔ اول اصول هستند.

۲۰- متمم اصطلاحی است که در قضیهٔ ۴۳ مقاله اول اصول به‌کار رفته است. اقلیدس در این قضیه‌ثابت می‌کند که اگر در متوازی‌الاضلاع MOSC قطر MS را بکشیم و از نقطه A روی این قطر دو متوازی‌الاضلاع جدید AM و ATSZ را رسم کنیم، متمّمها یا متوازی‌الاضلاعهای باقیمانده AO و AC برابرند، یعنی‌مساحت مساوی‌دارند [۸ ، جلد۱، ص۳۴۰-۳۴۱] .

۲۱- این ((سومین لم مقدماتی)) عکس قضیهٔ ۴۳ مقالهٔ اول اصول است که طبق آن اگر درمتوازی‌الاضلاع BNHT دو متوازی‌الاضلاع کوچکتر MT و MN که در M به‌هم می‌رسند رسم شوند و اگرمساحت این متوازی‌الاضلاعها مساوی باشد، آنگاه خط BMH یک خط راست (و قطر متوازی‌الاضلاع (BNHTخواهد بود. هرون این قضیه را به‌کمک روشهای مقالهٔ اول اصول و بدون استفاده از نظریهٔ تناسب‌و تشابه اثبات می‌کند. نگاه کنیدبه [۲ ، بخش ۱، ص۱۸۰-۱۸۲] .

۲۲- با استفاده از تناسب و تشابه، این برهان خیلی کوتاهتر می‌شود. مثلا دوباره M را محل‌برخورد GE و AK می‌گیریم. از E خطی بر GBعمود می‌کنیم تا امتداد GB را در نقطه Y قطع کند (خطچین در شکل۲)، سپس با توجه به‌تشابه مثلثها داریم $EY:YG = MK:KG$ مثلثهای EYB وBKA متساویند. پس $EY=BK$ و $YB=KA$ بنابراین $YG = AL$. در نتیجه $BK:AL = MK:KG$ ، پس $AL.MK = BK.KG\ (=AK^2)$ اگر M' را به‌عنوان نقطهٔ برخورد BH و AK تعریف کنیم، به‌طریق مشابه داریم $AL.M'K = AK^2$. پس $M = M'$ توجه کنید که AD ، BG و MF در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنندو به‌طور مشابه AP ، BG و MO یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۲۳- آلبرتوس در آغاز کتاب خود او را ((الفارابیوس)) خوانده است (گرچه روشن است که موضوع ربطی‌به‌فارابی ندارد)، ولی بعداً نام او را بدرستی ((انساریزیوس)) (نیریزی) آورده است [۲۰ ، ص۶۳] . برای اطلاع ازنمونهٔ دیگری از تأثیر نیریزی بر آلبرتوس کبیر نگاه کنید به‌مرجع [۲۱].

۲۴- ترجمهٔ لاتینی شرح نیریزی همانند متن عربی آن است، نگاه کنید به [۱ ، ص۶۹-۷۰] .

۲۵- به‌عبارت دیگر خطهای BAT و GAZ خطهای راست هستند. این حکم هیچ ربطی به قضیهٔ هرون‌در شرح نیریزی ندارد.

۲۶- این ارجاع باید مربوط به قضیهٔ ۳۰ از مقالهٔ اول هندسه باشد.که همان قضیهٔ ۳۰ از مقالهٔ اول اصول‌است. شمارهٔ قضیه‌ها در هندسه با شمارهٔ آنها در اصول یکسان است.

۲۷- عبارت درست‌تر این است :A را با خط راستی به S وصل کنید. در ادامهٔ مطلب ثابت می‌شود که AS ادامه مستقیم پاره‌خط LKA است.

۲۸- هنوز ثابت نشده است که سه خط GE ، HB وAK در نقطه مشترک M یکدیگر.را قطع می‌کنند.برهان هرون برای اثبات همین است

۲۹- در اینجا فرض شده است که خطهای BAT و GAZ راست هستند.

۳۰- نی ریزی دربارهٔ این لم آسان بحث نکرده است.

۳۱- به‌عبارت دیگر، اکنون نتیجه می‌شود که پاره خط AS ادامه مستقیم پاره‌خط LKA است.

۳۲- در اینجا مانند قضیهٔ هرون فرض شده است که M روی خط GE و روی خط AK واقع است.

۳۳- در اینجا هنوز ثابت نشده است که خط HB از نقطه M می‌گذرد.

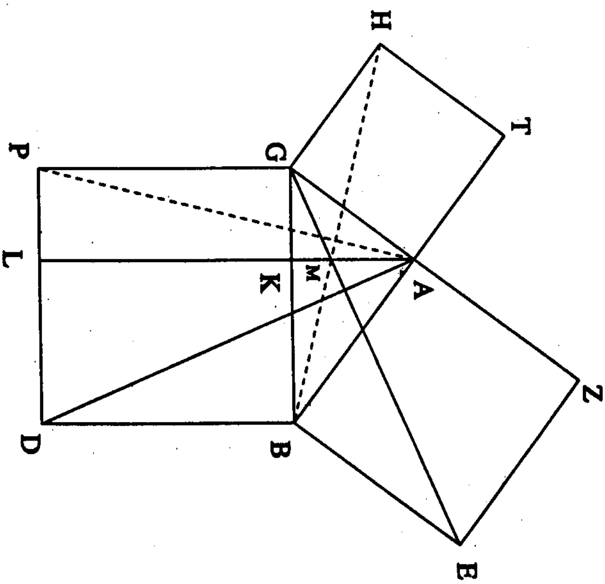
۳۴-این سومین لم‌هرون بلافاصله پیش ازقضیهٔ‌ترجمه شده در بالاست.

۳۵-برهان هرون در اینجا به‌پایان می‌رسد.

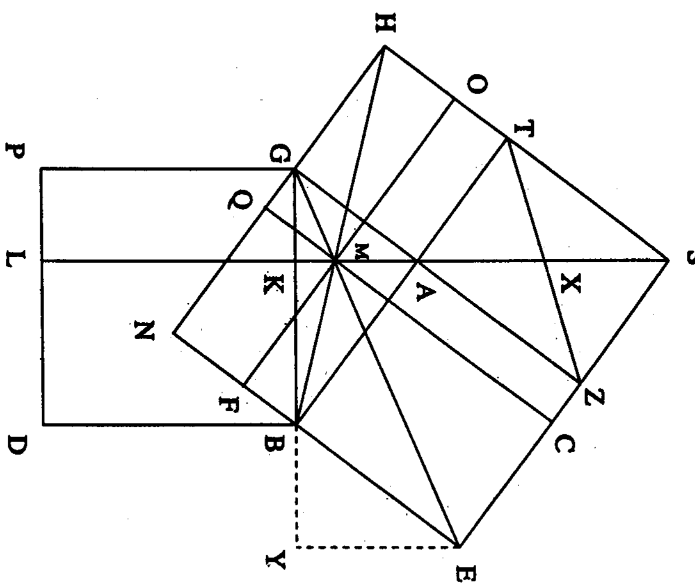
۳۶- این اشاره نشان می‌دهد که آلبرتوس کبیر این استدلال را بدرستی درک نکرده است. نقطهٔ M به‌عنوان محل برخورد AK و EG تعریف شده است، پس در اینجا چیزی برای اثبات وجود ندارد.

۳۷-سطرهای اخیر برای اثبات این که خطهای TAB و GAZ راست هستند کافی است. برای این‌منظور نیازی به‌نقطه M یا برهان هرون نیست.

۳۸- توجه کنید که این حکم متناقض است با حکم قبلی آلبرتوس که قضیهٔ پنجم هرون ((آنچه رااقلیدس در برهان قضیه ۴۶ پذیرفته است)) (یعنی قضیه فیثاغورس را) ثابت می کند .



شکل ۱



شکل ۲

مــراجــع

[۱] Anaritius Commentary on Euclid : The Latin Translation I-IV ed . Paul M . J . E Tummers . Nijmegen : Ingenium Publishers ۱۹۹٤ : Aristar ium Supplementa IX (ISBN ۹۰ - ۷۰٤۱۹ - ٦٥-۱).

[۲]R.O Besthorn J.L. Heiberg .Codex Leidensis ۳۹۹،۱. Euchidis Elementa ex interpretatione Al - Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii Arabice et Latine , Copenhagen: In Libraria Gyldendaliana.Pars ۱ Fasc . ۱(=Book I) ۱۹۱ pp. , ۱۸۹۳ Pars ۲ Face . ۱ (= Book ۲) , ۷۹ pp . , ۱۹۰۰ , Pars ۲ Fase.۲(=Book۳), ٤۸ pp, ۱۹۰٥ , Pars ۳ Fasc. ۱(= Book ٤) and Pars ۳ fasc. ۲ (= Book V), were edited by G . Junge J . Raeder W.Thomson Copenhagen: In Libraria Gyidendaliana , ۱۹۳۲ . repr . Fraukfurt ۱۹۹۷ .

[۳]Axel Bjrnbo,Uber zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert , Bibiotheca Mathematica , ۳. Folge ۳ (۱۹۰۲), ٦۳ - ۷٥ .

[٤] Hubert L.L.Busard Einiges uber die Handschrift Leiden ۳۹۹, ۱ und die arabisch - lateinische Ubersetzung von Gerhard von Cremona in : History of Mathematics : States of the Art,Flores quadrivii - Studies in Honor of Christoph J.Scriba,ed . Joe Dauben Menso Folkerts Eber hard

Knobloch Hans Wussing, San Diego : Academic Press ۱۹۹٦ PP. ۱۷۳-۲۰٦.

[۵] Maximilian Curtze, Anaritii in decem libros primos elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviense ۵٦۹ servate , Leipzig : Teubner ۱۸۹۹ (Euchidis opera Omnia , supplementum).

[٦] Charles G.Gillispie , ed. , Dictionary of Scientific Biography New York : Scribner s Sons ۱۹۷۰ - ۱۹۸۰ ۱٦ vols .

[۷] F. Sezgin , Geschichte des arabischen Schrifttums vol. ۵ , Mathematik , Leiden ,Brill , ۱۹۷٤; vol ٦ , Astronomie Leiden ; Brill ۱۹۷۸ ; vol. ۷, Astrologie Meteorologie und Verwantes , Leiden ; Brill , ۱۹۷۸ .

[۸] Thomas L. Heath ,The Thirteen Books of Euchid s Elements second edition New York :Dover Publications ۱۹۵٦ . ۳ vols .

[۹] George Molland Roger Bacon s Geometria Speculatiua, in : Menso Folkerts Jan P .Hogendijk, ed. ,Vestigia Mathematica : Studies in Medieual and Early Modern Mathematics. in Honour of H . L . L Busard , Amsterdam ; Rodopi ۱۹۹۳ , PP . ۲٦۵ - ۳۰٤ .

[۱۰] Otto Neugebauer , A History of Ancient Mathematical Astronomy, New York : Springer ۱۹۷۵ , ۳ vols . Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences ۱ .

[۱۱] The Commentary of Pappus on Book X of Euclid ' s Elements.Arabic Text and Translation by Williom Thomson with Introductory Remarks Notes and a Glossary of Technical Terms by Gustav Junge and William Thomson. Cambridge : Harvard University Press ۱۹۳۰ Reprints : New York Johnson Reprint Corporation ۱۹۶۸ Frankfurt : Institute for the History of Arabic - Islamic Sciences ۱۹۹۷ Islamic Mathematics and Astronomy ۱۶ .

[۱۲] Proclus:A Commentry on First book of Euclid 's Elements Translated with Introduction and Notes by Glenn R. Morrow, Princeton : Princeton University Press , ۱۹۷۰ .

[۱۳] Abu l = Qasim Qurbani , Biographie des mathematiciens de le poque islamique (in Persian) Tehran : Presses Universitaires d' Iran ۱۹۹۵ .

[۱۴] Heinrich Suter,Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke Leipzig : Teubner , ۱۹۰۰, reprinted in [۱۹] vol . ۱ .

[۱۵] Heinrich Suter, Dos Mathematiker- Verzeichniss im Fihrist des Ibn Abijacqub an - Nadim zum ersten Mal vollstandig ins Deutsche ubersetzt und mit Anmerkungen versehen , Zeitschrift fur Mathematik und Physik , ۳۷ (۱۸۹۲) , Supplement , pp . 1 - ۸۷ reprinted in (۱۹) vol . ۱ .

[۱۶] Heinrich Suter , Uber einige noch nicht sicher gestellte Autorennamen in den Ubersetzungen des gerhard von Gremona Bibliotheca Mathematica , ۳ . Folge ٤ (۱۹۰۳) ۱۹ - ۲۷ reprinted in (۱۹) vol . ۲ .

[۱۷] Heinrich Suter , Uber den Kommenter des Muhammed ben Abdelbaqi zum zehnten Buche des Euklides , Bibliotheca Mathematica , ۳ . Folge ,۷(۱۹۰۶ -۷) , ۲۳٤ - ۲۵۱, reprinted in [۱۹] vol . ۲ .

[۱۸] Heinrich Suter , Zur Frage des von Nairizi zitierten Mathematikers "Diachasimus" Bibliotheca Mathematica , ۳ . folge , ۷ (۱۹۰۶ - ۷),۳۹۶ , reprinted in [۱۹] vol . ۲ .

[۱۹] Heinrich Suter , Beitrage zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam , ed . F . Sezgin , Frankfurt : Institut fur Geschichte der arabischislamischen Wissenschaften ۱۹۸۶ , ۲ vols .

[۲۰] Paut Tummers Albertus (Magnus) ' Commentaar op Euchides' Elementen der Geometrie Nijmegen ۱۹۸٤, ۲ vols. [in Dutch . Ph . D . Dissertation University of Leiden] .

[۲۱] Paul Tummers Albertus Magnus ' View on the Angle , Vivarium ۲۲ (۱۹۸٤) , ۳۵ - ٦۲ .