تاریخ ریاضیات
در ایران باستان

فیبوناچی

آشنائی با ریاضیات

جلد سی و دوم

مردادماه ۱۳۷۰

آشنایی با ریاضیات (جلد سی و دوم)

ویراستار: پرویز شهریاری

امورفنی: حسن نیك بخت

ناشر: نشر توسعه

تیراژ: ۲۲۰۰ نسخه

چاپ اول: بهار ۱۳۷۵

حروفچینی: مهدی

چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد سی و دوم

۵۰۰ ریال

مارشال و. برن ـ رانلد ل. گراهام

مسألهٔ کوتاهترین شبکه

کوتاهترین شبکهٔ پاره‌خط‌های اتصال‌دهنده بین مجموعهٔ دلخواهی که مثلاً ۱۰۰ نقطه داشته باشد کدام است؟ پاسخ این مسأله را تندکارترین کامپیوترها و تیزهوش‌ترین ریاضی‌دانان نیز نتوانسته‌اند بیابند.

RONALD L. GRAHAM و MARSHAL J. W. BERN
سالهادربارهٔ مسالهٔ کم‌طول‌ترین شبکه کار کرده‌اند. برن پژوهشگری از مرکز تحقیقاتی زیراکس پالوآلتو است. وی پس از دریافت فوق لیسانس از دانشگاه تکزاس، واقع دراوستین (به‌سال ۱۹۸۰) دربخش پردازش سیگنالها درمؤسسهٔ انسکو به‌کار پرداخت. درسال ۱۹۸۷ ازدانشگاه برکلی کالیفرنیا در رشتهٔ علوم کامپیوتردکترا گرفت. سرگرمی وی دراوقات فراغت پرورش کاکتوس وکار تفننی نقاشی و چاپ است. گراهام معاون سرپرست پژوهشی بخش علوم انفورماتیك درآزمایشگاههای AT&T شرکت بل واستاد دانشگاه راتگرزاست. وی درسال ۱۹۶۲ از برکلی دکترای ریاضی گرفت. خودش علاقه‌مند بـه ذکراین نکته است کـه قبلاً رئیس انجمن بین‌المللی شعبده بازان بوده است. این دومین مقالهٔ گراهام است که درمجلهٔ ساینتیفیك آمریکن به‌چاپ رسیده است.

شرکت فرضی خدمات تلفن «اشتاینر» اعلام کـرد در صورت یافتن کوتاهترین شبکهٔ ممکن خطوط برای وصل‌کردن تلفن ۱۰۰ مشترك به‌یکدیگر، ملیونها دلار صرفه‌جویی خواهدکرد. شرکت اشتاینر برای یافتن راه‌حل به

شرکت خدمات کامپیوتری کاوالیری مراجعه‌کرد، که به‌خاطر برنامه‌نویسها و کامپیوترهای تندکارش شهرت جهانی دارد. شرکت کاوالیری، پس از یك هفته برنامه‌ای برای حل مسئلهٔ اشتاینر عرضه‌کرد ونشان دادکه با این برنامه کم‌طول‌ترین شبکـه برای ۱۵ مشترك دقیقاً طی یك ساعت یافته شده است. اشتاینردر ازای این برنامه ۱۰۰۰ دلار به کاوالیری پرداخت ومتعهد شدکه بابت تهیهٔ جواب کامـل برحسب مدت زمان کار کامپیوتر ثانیه‌ای یك سنت بپردازد. وقتی‌کامپیوترکارمحاسبه را برای تمامی ۱۰۰ مشترك به‌پایان رساند شرکت تلفن تریلیونها دلار بابت هزینه‌های کامپیوتر بدهکار شده بود و همهٔ مشتریانش ــ بنا بـه میل خود یا در اثر جابجایی قاره‌ها ! ــ تغییرمکان داده بودند.

آیا کاوالیری برنامهٔ غلطی به‌اشتاینرفروخته بود؟ این مشکل، مثالی‌از مسالهٔ اشتاینراست‌که درآن کم‌طول‌ترین شبکه‌ای از پاره‌خطها که مجموعهٔ نقاط مفروضی را به یکدیگرمتصل‌کنند خواسته می‌شود. مسالهٔ اشتاینر صرفاً با ترسیم خطوطی بین نقاط مفروض حل نمی‌شود، بلکه برای این منظوربايد نقاط جدیدی افزوده شوند، موسوم به نقاط اشتاینرکه درکم‌طول‌ترین شبکه به منزلهٔ نقاط انشعاب هستند. ریاضیدانان و کارشناسان کامپیوتر برای تعیین محـل و تعداد نقاط اشتاینرآلگوریتمها یـا دستورالعملهای دقیقی ابـداع کرده‌اند. بااین وجود، حتی بهترین این‌آلگوریتمها بااستفاده ازتندکارترین کامپیوترها هم نمی‌توانند به‌ازای مجموعهٔ بزرگی ازنقـاط مفروض جوابی عرضه‌کنند، زیرا زمان لازم برای حل‌چنین مساله‌ای طولانی‌ترازآن است‌که بتوان این‌کار را عملی دانست. بعلاوه، مسالهٔ اشتاینر جزو دسته‌ای از مسایل استکـه امروزه بسیاری از کارشناسان کامپیوتـر معتقدند هیچگاه نمی‌توان برایشان آلگوریتم کارآمـدی یافت. بـه این دلیل ملامتی متوجـه شرکت کاوالیری نیست.

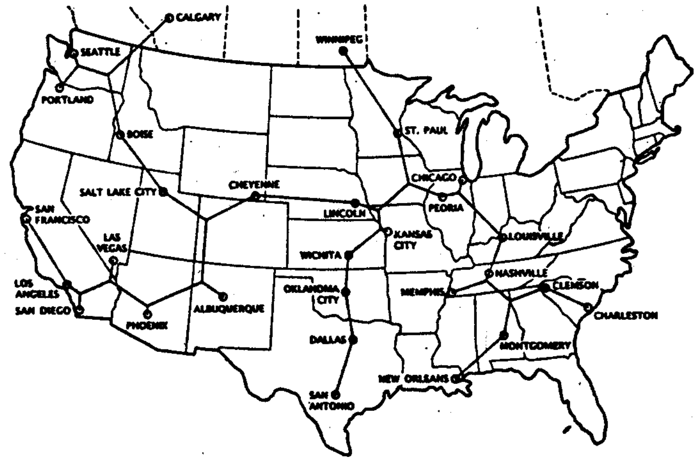
ازسوی دیگر، کاوالیری می‌توانست برنامه‌ای عملی تهیه‌کند تا بتواند جوابهایی به دست آورد که از کم‌طول‌ترین شبکه قدری طولانی‌تر باشند. در حـال حاضر جوابهای تقریبی مسالـهٔ کم‌طول‌ترین شبکه بـرای مقاصد گوناگون از جمله طراحی مدارهای مجتمع (انتگـره)، تعیین شجرهٔ تکاملی

گروهی ازجانوران و به‌حداقل رساندن مصالح لازم برای شبکه‌های خطوط تلفن، لوله‌کشی، وجاده‌ها، محاسبه می‌شود.

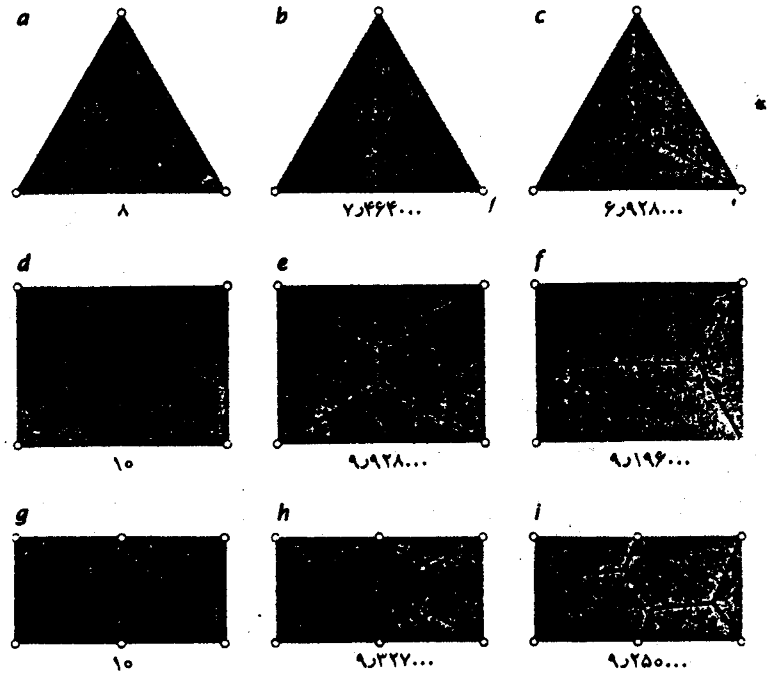
مسالهٔ اشتاینردرصورت‌کلی‌اش نخستین‌بار به سال ۱۹۳۴ درمقاله‌ای از میلوش‌کوسلر و ویتخ یارنیك عنوان شد، ولی تاسال ۱۹۴۱،که ریچارد کورانت و هربرت ای. رابینز آن را در کتـاب **ریاضیات چیست*** خـود آوردند، مورد توجه عمومی قرار نگرفت. کورات و رابینز این مساله را به کار یاکوب اشتاینر، ریاضیدانی از قـرن نوزدهم در دانشگاه برلین ربط دادند. در کار اشتاینرنقطهٔ منفردی جستجومی‌شدکه اتصالش بـه مجموعه‌ای ازنقاط‌مفروض شبکه‌ای باکوتاهترین‌طول‌کلی ایجاد می‌کرد. درسال ۱۶۴۰ ابتدا حالت خاصی از هردو مساله ــ مساله‌ای‌که اشتاینررویش کارکرده‌بود ومساله‌ای‌که به‌نام‌وی خوانده می‌شود ــ مطرح شد: نقطهٔ P را طوری بیابید که مجموع فاصله‌هایش تاسه نقطهٔ مفروض‌حداقل باشد. اوانگلیستا توریچلی و فرانچسکوکاوالیری مستقل از یکدیگر این مساله را حل‌کردند. توریچلی و کاوالیری به این نتیجه رسیدند که اگر زاویه‌های به رأس P همگی ۱۲۰ درجه یا بیشتر باشند، آنگاه مجموع فاصله‌ها به‌حداقل می‌رسد.

توریچلی و کاوالیری با دانستن این که زاویه‌های به رأس P حداقل ۱۲۰ درجه‌اند، ترسیمی هندسی برای یافتن P ابداع کردند [شکل صفحهٔ ۱۸۵ را ببینید]. نقاط مفروض با پاره‌خطهایی به‌یکدیگروصل شده‌اند (این نقاط را A، B و C می‌نامیم به‌طوری‌کـه B رأس بزرگترین زاویه باشد). اگرزاویهٔ B اندازه‌اش ۱۲۰ درجه یا بیشتر باشد، آنگاه نقطهٔ P برنقطهٔ B منطبق است. به‌عبارت دیگر، کوتاهترین شبکه همان پاره‌خطهای بین A و B وبین B و C است. اگرزاویهٔ B کمتراز ۱۲۰درجه باشد، آنگاه نقطهٔ P باید جـایی درون مثلث باشد. برای یافتن آن، روی درازترین ضلع مثلث، یعنی ضلع بین نقاط A و C، مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم. رأس سوم این مثلث متساوی‌الاضلاع که X نامیده می‌شود، در طرف دیگر AC (نسبت به نقطهٔ B) قـرار می‌گیرد. دایره‌ای برمثلث متساوی‌الاضلاع محیط می‌شود و

* این‌کتاب به‌فارسی ترجمه و منتشرشده است؛ ترجمهٔ حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹ تهران.



کامپیوترحباب صابونی (شکل بالای صفحه) دریافتن کم‌طول‌ترین شبکهٔ پاره‌خط‌های اتصال‌دهنده بین ۲۹ شهر با کامپیوترالکترونیکی (شکل پایین صفحه) رقابت می‌کند. کامپیوترحباب صابونی‌که درآن سنجاقها در موقعیتی نظیرشهرها نسبت به یکدیگر واقعند، طول غشاهای صابون را در یك ناحیهٔ موضعی به حداقل می‌رساند. به‌این طریق یك شبکهٔ کم‌طول به‌دست می‌آیدکه الزاماً کم‌طول‌ترین شبکه نیست. کامپیوتر الکترونیکی بااستفاده ازآلگوریتمی‌که ارنست ج. کاکین و دنتون ای. هیوگیل از دانشگاه ویکتوریا ابداع کرده‌اند، کم‌طول‌ترین شبکهٔ واقعی را به‌طور قطعی مشخص می‌کند. مسالهٔ ۲۹ نقطه‌ای تقریباً مرز فعلی توانایی‌های محاسباتی است.



مسالهٔ شبکه برای نقاط واقع در رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع، مستطیل و «نردبان» جوابهای‌گوناگونی دارند. درشکلهای الف، دوزنقاط مفروض بدون افزودن نقاط جدید و به‌شیوهٔ موسوم به جواب‌کوچکترین بافت، یا کوچکترین بافت درختی، به یکدیگر وصل شده‌اند. درختهای اشتاینرکه با افزودن نقاط اتصال جدید ساخته می‌شوند در شکل‌های ج، ه، و، ح و ط نشان داده شده است. فقط ج، و، ط کم‌طول‌ترین درختهای اشتاینر یا کم‌طول‌ترین شبکه‌ها هستند. عددی‌که زیرهرجواب نوشته شده، طول‌کلی تقریبی پاره‌خطهاست.

پاره‌خطی از نقطهٔ B به X کشیده می‌شود. نقطهٔ P جایی قرار داردکه این خط دایره راقطع می‌کند. با اتصال نقاط A، B و C به P سه زاویهٔ دقیقاً ۱۲۰ درجه ایجاد می‌شود وکم‌طول‌ترین شبکه به‌دست می‌آید. بعلاوه، معلوم می‌شودکه طول پاره‌خط از B تا X با طول کم‌طول‌ترین شبکه برابراست. دراین مقاله X را نقطهٔ جایگزین می‌نامیم، زیرا جایگزین‌کردن نقاط A و C با X شبکه را تغییر نمی‌دهد.

مسالهٔ اشتاینرسه‌نقطه‌ای وچندنقطه‌ای خصوصیات مشترك زیادی‌دارند.

شکل جوابها، که درختی خوانده می‌شود، طوری است که با حذف هر پاره خط از کم‌طول‌ترین شبکه، یکی از نقاط مفروض جدا می‌افتد. به‌عبارت دیگر، نمی‌توان با حرکت از یك نقطه روی شبکه دوباره به‌همان نقطهٔ بازگشت، بی‌آنکه خطوط دوباره پیموده شوند. بنابراین، جوابهای مسالهٔ سه نقطه‌ای وچندنقطه‌ای، درختهای اشتاینرو پاره‌خطها نیز یال نامیده می‌شوند ونقاطی ـ مثل P ـ که برای رسم درخت باید افزوده شوند نقاط اشتاینر نام دارند.

مسالهٔ سه نقطه‌ای اشتاینر، اطلاعاتی نیز در مورد خصوصیات هندسی کم‌طول‌ترین درختهای اشتاینر به ما می‌دهد. اولاً، هرزاویه دست‌کم ۱۲۰ درجه است، که به این ترتیب هرنقطهٔ مفروض حداکثر با سه یال به درخت متصل می‌شود. ثانیاً، درهرنقطهٔ اشتاینر، دقیقاً سه‌یال با زاویه‌های ۱۲۰ درجه به یکدیگر می‌رسند. ثالثاً، تعداد یالها در هردرخت همیشه از مجموع تعداد نقاط مفروض وتعداد نقاط اشتاینر یکی کمتراست. و سرانجام، چون دقیقاً سه یال در هرنقطهٔ اشتاینر به هم می‌رسند و هرنقطهٔ مفروض حداقل باید به یك یال وصل باشد، حداکثرتعداد نقاط اشتاینر در هرمساله، دوتا کمتراز تعداد نقاط مفروض است.

به‌ازای تعداد وآرایش یکسانی از نقاط مفروض، درختهای اشتاینر متعدد وگوناگونی باخواص موردنظرمی‌توان رسم کرد. بعضی‌ازاین درختها را، که جواب‌های مینی‌مال موضعی نام دارند، نمی‌توان با دستکاریهای جزئی ـ مثلاً کمی حرکت دادن یك یال یاایجاد یك‌نقطهٔ اشتاینر ـ کوتاهتر کرد. ولی هر درخت اشتاینرمینی‌مال موضعی یك‌کم‌طول‌ترین جواب ممکن نیست. برای تبدیل یك شبکه به‌کم‌طول‌ترین درخت ممکن، که درخت‌اشتاینر مینی‌مال‌سراسری خوانده می‌شود، ممکن است تغییرات وسیعی در آرایش موجود لازم باشد.

بدنیست موضوع را در مجموعه‌ای از نقاط مفروض، که چهارگوشهٔ مستطیلی به‌ابعاد سه متردر چهارمترهستند، نشان دهیم. جوابها دونقطهٔ اشتاینر دارندکه آنها را به دوصورت مختلف می‌توان قرار داد، هریك از آرایشها درخت اشتاینری پدید می‌آوردکه به‌هرنقطهٔ اشتاینرآن سه یال با زاویه‌های ۱۲۰ درجه وصل شده است. اگرنقاط اشتاینر به‌موازات عرض قرارگیرند،

درخت اشتاینر مینی‌مال موضعی با طول تقریبی ۹/۹ مترحاصل می‌شود. اگر نقاط اشتاینر به موازات طول قرارگیرند، درخت اشتاینرمینی‌مال سراسری با طول تقریبی ۹/۲ متر به‌دست می‌آید.

یك روش ناپخته برای یافتن کوتاهترین‌شبکه، جستجوی همهٔ درختهای اشتاینرمینی‌مال موضعی، محاسبهٔ طول آنها و انتخاب کم‌طول‌ترینشان است. اما، ازآنجا که نقاط اشتاینررا هرجا می‌توان قرار داد، معلوم نیست‌که همهٔ درختهای اشتاینرمینی‌مال موضعی ممکن رابتوان درمدت زمان متناهی‌محاسبه کرد. ز.آ. ملزاك از دانشگاه بریتیش کلمبیا براین مشکل فایق‌آمد ونخستین آلگوریتم را برای مسالهٔ اشتاینر به‌دست آورد.

در آلگوریتم ملزاك، تعداد زیادی اتصالهای ممکن بین نقاط مفروض ومواضع ممکن زیادی برای نقاط اشتاینردرنظرگرفته می‌شود. این‌آلگوریتم را می‌توان شامل دو بخش دانست. دربخش اول، مجموعهٔ نقاط مفروض، به همهٔ زیرمجموعه‌های ممکن از نقاط مفروض تفکیك می‌شود. دربخش دوم، برای هر زیرمجموعه با استفاده از روش ترسیمی، که برای حل مسالهٔ سه نقطه‌ای به‌کار رفت، تعدادی از درختهای اشتاینرممکن ساخته می‌شود.

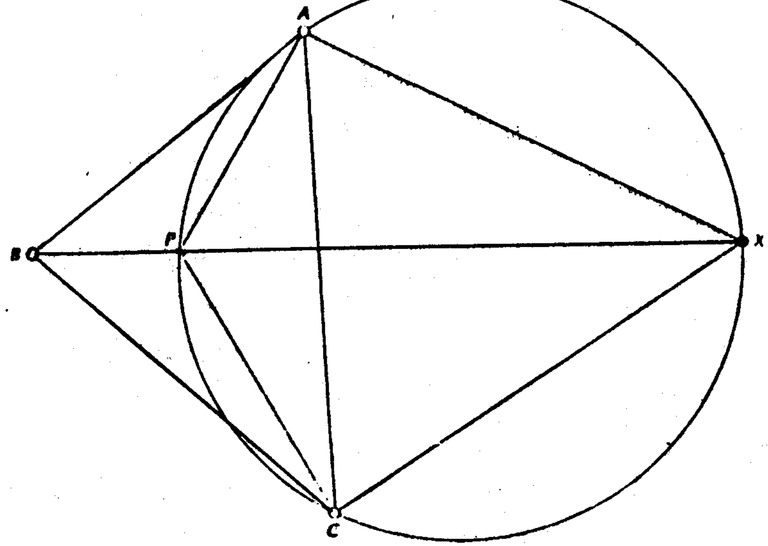
همان‌طورکه درمسالهٔ سه‌نقطه‌ای گفته‌شد، هرنقطهٔ جایگزین را می‌توان به جای دوتا از نقطه‌های مفروض گذاشت، بی‌آن‌که طول جواب تغییرکند. اما درمسالهٔ کلی، این آلگوریتم باید زوج مناسب برای این جایگزینی را حدس بزند ونهایتاً همهٔ حدس‌های ممکن را بسنجد. بعلاوه، نقطهٔ جایگزین می‌تواند در هریك از دوطرف پاره‌خطی‌که این زوج نقاط را وصل می‌کند قرارگیرد، زیرا مثلث متساوی‌الاضلاعی، که در ترسیم به‌کار می‌رود، می‌تواند دوجهت مختلف داشته‌باشد. پس ازآن‌که به‌جای یك‌زوج نقاط زیرمجموعه، یکی از دو نقطهٔ جایگزین ممکن گذاشته شد، درهرگام بعدی آلگوریتم، دو نقطهٔ مفروض یا یك نقطهٔ مفروض و یك نقطهٔ جایگزین، یا دو نقطهٔ جایگزین بایك نقطهٔ جایگزین دیگرتعویض می‌شوند، تا این‌که زیرمجموعه به‌سه نقطه کاهش یابد.

با یافتن نقطهٔ اشتاینر این سه نقطه، آلگوریتم در جهت عکس عمل می‌کند و به تعیین نقاط اشتاینرمربوط به هرنقطهٔ جایگزین می‌پردازد [شکل

آلگوریتم ملزاك، حتی برای مسالههای کوچك وقت زیادی می‌برد، زیرا حالتهای ممکن فوق‌العاده زیادی را در نظر می گیرد. مثلاً مسالهٔ ۱۰ نقطه‌ای را می‌توان به ۵۱۲ زیرمجموعه از نقاط مفروض تفکیك‌کرد. البته، زیرمجموعه‌های دو نقطه‌ای کار زیادی نمی‌برند، ولی هر یك از ۴۵ زیرمجموعهٔ هشت نقطه‌ای دو ملیون عمل جایگزینی دارد. بعلاوه، بیش از ۱۸۰۰۰ راه برای ترکیب دوبارهٔ این زیرمجموعه‌ها به صورت درخت وجود دارد.

بی‌شك پژوهشگران روش‌های بهتری برای تنظیم محاسبه و افزایش سرعت محاسبه یافته‌اند. آنان، به جای در نظر گرفتن خصوصیات هندسی مساله، توجه خود را به الگوهای ممکن اتصالها، که توپولژی شبکه خوانده می‌شود، معطوف داشته‌اند. توپولژی‌شبکه‌مشخص‌می‌کند‌کدام نقاط به‌یکدیگر وصل شده‌اند و به‌محل واقعی نقاط اشتاینر کاری ندارد. با اختیار کردن یك توپولژی خاص، اعمال جایگزینی مناسب نسبتاً سریعتر یافته می‌شوند. این شیوهٔ سازماندهی کار، سرعت محاسبهٔ کم‌طول‌ترین درختهای اشتاینر برای زیرمجموعه‌ها را بسیار افزایش می‌دهد. مثلاً برای یك زیرمجموعهٔ هشت نقطه‌ای، آلگوریتم فوق به‌جای دو ملیون عمل جایگزینی مختلف، تنها حدود ۱۰۰۰۰ توپولژی مختلف را باید در نظر بگیرد.

ازآنجاکه تعداد توپولژیها با افزایش اندازهٔ زیرمجموعه سریعاً زیاد می‌شود، احتمالاً اگرفقط لازم بود زیرمجموعه‌های خیلی‌کوچك از مجموعهٔ نقاط مفروض در نظر گرفته شوند، احاطه بر مسالهٔ اشتاینر آسانتر می‌شد. آزمایش‌های انجام‌شده با آلگوریتم‌ملزاك حاکی از آن است‌که‌کم‌طول‌ترین شبکه برای بیش از شش نقطه با آرایش تصادفی را معمولاً می‌توان به‌کم‌طول‌ترین‌شبکه‌هایی برای‌تعدادکمتری‌ازنقاط‌تفکیك‌کرد. اما فن ر.ك. چونگ از مرکز پژوهشهای مخابراتی بل و یکی از مؤلفین مقالهٔ حاضر (گراهام) با درنظر گرفتن‌آرایشهای خاصی از‌نقاط، که نردبانی خوانده می‌شود، نشان داده‌اند که مجموعه‌هایی به حد دلخواه بزرگ از نقاط وجود دارند که کوتاهترین‌درخت اشتاینر آن‌ها را نمی‌توان تفکیك کرد. درآرایش‌نردبانی، نقاط مفروض به‌فاصله‌های یکسان روی دوخط متوازی قرار می‌گیرند. برای



کم‌طول‌ترین شبکه را برای سه نقطهٔ A، B و C می‌توان رسم‌کرد. مثلث متساوی‌الاضلاع ACX روی درازترین ضلع مثلث ABC بنا می‌شود وسپس دایره‌ای برآن محیط می‌شود. محل برخورد دایره با پاره‌خط رسم شده از B به X که راس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع است، نقطهٔ P را که نقطهٔ اشتاینر خوانده می‌شود مشخص می‌کند. با اتصال نقاط A، B و C به P سه زاویهٔ ۱۲۰ درجهٔ حاصل می‌شود و کم‌طول‌ترین شبکه به‌دست می‌آید. طول پاره‌خط BX باطول شبکه برابراست.

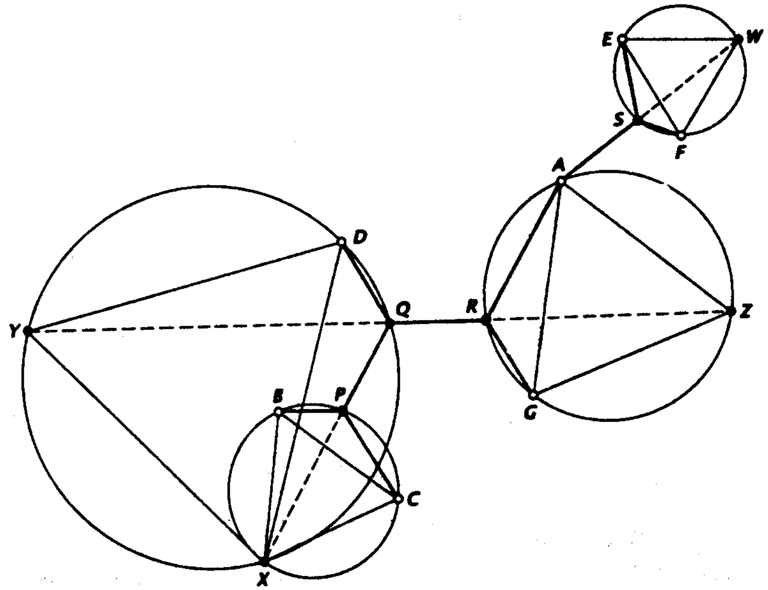
صفحهٔ ۱۸۳ را ببینید]. ممکن است به‌علت بروز شرایط ناهمخوان درمورد تعیین محل نقاط اشتاینرراهی به بن‌بست برسد. اما راه موفقیت‌آمیز منجر به یافتن درخت اشتاینری می‌شودکه هریك ازنقاط مفروض متعلق به‌زیرمجموعه با یك یال به‌آن وصل است، پس از ملاحظهٔ همهٔ جایگزینی‌ها، کوتاهترین درخت اشتاینر برای این زیرمجموعه به توسط آلگوریتم انتخاب می‌شود. با ترکیب‌کوتاهترین درخت‌های اشتاینر برای زیرمجموعه‌ها درهمهٔ حالات ممکن، به‌منظور تکمیل مجموعهٔ اولیه ازنقاط مفروض، همهٔ درختهای اشتاینر مینی‌مال موضعی ممکن به‌دست می‌آیند وخصوصیات هندسی کوتاهترین‌شبکه تعیین می‌شود.

این مسالهٔ اشتاینرخاص، جوابی کلی یافته شده است. این جواب نشان داده که تعداد نقاط اشتاینر درکوتاه‌ترین درخت اشتاینر با تعداد «پله»های فرد حداکثر است: تعـداد نقاط مفروض منهای دو. چنین درخت اشتاینـری را نمی‌توان تفکیك کرد، زیـرا برای گذاشتن هرنقطهٔ اشتاینرلازم است که همهٔ نقاط مفروض یکجا در نظر گرفته شوند. بنابراین، بـه سادگی نمی‌توان از کاهش اندازهٔ زیرمجموعه‌ها ــ که در آلگوریتم ملزاك انجام می‌شود ــ سخن گفت.

عده‌ای از پژوهشگران برای کاستن ازحجم کار، آلگوریتم ملزاك را با یافتن شیوه‌های ظریفتر اصلاح کرده‌اند [شکل صفحهٔ ۱۸۶ را ببینید]. دراین روشها بخشی ازمحاسبه که صرفاً منجر به پیدایش شبکه‌های طولانی می‌شود «هرس» یاحذف می‌شود. شیوه‌های تازهٔ هرس کردن، زمان محاسبه را به‌طور اساسی کاهش داده است. برنامه‌های مبتنی برآلگوریتم ملزاك، مثلاً برنامه‌ای که درسال ۱۹۶۹ توسط ارنست ج. کاکین ازدانشگاه ویکتوریا نوشته شد، توانستند همهٔ مسایل ۹ نقطه‌ای و بعضی مسایل ۱۲ نقطه‌ای را ظرف حـدود نیم ساعت حل کنند. برنامه‌ای که اخیراً به‌وسیلهٔ کاکین و یکی از همکارانش به‌نام دنتون ای. هیوگیل در دانشگاه ویکتوریا نوشته شده، بااستفاده از یك روش هرس‌کردن پرتوان، که بـه توسط پاول وینتراز دانشگاه کپنهاك عرضه شده، همهٔ مسایل ۱۷ نقطه‌ای واغلب مسایل ۳۰ نقطه‌ای راکه به‌طورتصادفی ایجاد شوند در چنـد دقیقه حل می‌کند. روش هرس‌کـردن وینتر در حذف توپولژیهای ممکن چنان موفقیت‌آمیز است کـه اکنون بخش عمدهٔ محاسبه، ترکیب مجدد جواب‌های حاصل شده برای زیرمجموعه‌هاست.

ولی درمورد هریك ازاین برنامه‌ها، وضعیت هندسی می‌تواند همچون تعداد نقاط برزمان اجرا تأثیرشدید داشته باشد. بعلاوه، زمان محاسبه حتی برای پیچیده‌ترین آلگوریتم با افزایش تعـداد نقاط به‌صورت نمایی رشد می‌کند و مسایل اشتاینـر ۱۰۰ نقطه‌ای هنوز خارج ازمحدودهٔ توانایی‌های فعلی‌هستند. آیا به‌راستی هیچ گاه آلگوریتم‌کارآمدی برای محاسبهٔ جوابهای مسایل اشتاینر بزرگ یافته خواهد شد؟

پیشرفت‌های حاصل شده در دانش نظری کامپیوتر اکثر پژوهشگران را



آلگوریتم ملزاك، هـر مسالهٔ کم‌طول‌ترین شبکه را بـه چند مسالهٔ کوچکترتحویل می‌کند. نقطهٔ A محل درست برای تفکیك مساله به‌یك مسالهٔ سه‌نقطه‌ای و یك مسالهٔ پنج نقطه‌ای است. به‌منظور ترسیم درختهای اشتاینرممکن برای مسالهٔ پنج نقطه‌ای، به‌جای یك زوج نقطه (مثلاً B و C) یك نقطهٔ منفرد (دراین حالت، X) از طریق ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاعی روی یك طرف B و C، می‌توان‌گذاشت. بااین‌ترتیب مساله بـه صورت چهارنقطه‌ای با نقاط X، D و A تبدیـل می‌شود. سپس می‌توان نقطه‌ای به‌جای هرزوج ازاین نقاط گذاشت (دراین حالت ابتدا Y به‌جای D و X و سپس Z به‌جای G و A). هریك از مثلثهای متساوی‌الاضلاع رسم شده (XDY، AGZ و BCX) در دایره‌ای محاط می‌شود. نقاط برخورد خط واصل Y و Z با دوتا از دایره‌ها نقاط Q و R را مشخص می‌کند و محل برخورد خط واصل X و Q با دایرهٔ باقیمانده، نقطهٔ P را تعیین می‌کند. چون بهترین تقسیم‌بندی ومناسب‌ترین زوجها را از قبل نمی‌توان تعیین‌کرد، برای یافتن کم‌طول‌ترین درخت باید همهٔ حالتهای ممکن را درنظرگرفت.

متقاعدکرده که آلگوریتم‌های موجود برای مسایل اشتاینررا نمی‌توان به‌طور اساسی بهبود بخشید. در ایـن نظریه برای هرنمونه یـا مثال از یك مساله، اندازه‌ای درنظر گرفته می‌شود. درمورد مسایل اشتاینر یك معیارطبیعی برای اندازه وجود دارد: تعداد نقاط‌مفروض. آنگاه تعداد اعمال اصلی‌کامپیوتری

ـ مثل جمع، تفریق یا مقایسه ـ که یك آلگوریتم برای حل نمونه‌ای با اندازهٔ خاص نیاز دارد مورد توجه قرار می‌گیرد. چون ممکن است نمونه‌هایی با اندازهٔ یکسان تعداد اعمال متفاوتی لازم داشته باشند، حداکثر تعداد اعمال به‌صورت تابعی از اندازه در نظر گرفته می‌شود. اگر تعداد اعمال به صورت توانی از اندازهٔ نمونه (n) مثلاً به صورت عبارت‌های n^2، $5n$، یا $6n+n$ زیاد شود، این دستورالعمل یك آلگوریتم با زمان چند جمله‌ای خوانده می‌شود. این گونه آلگوریتم‌ها دست‌کم به معنایی نظری، کارآمد قلمداد می‌شوند. اگر تعداد اعمال برحسب اندازه به‌صورت نمایی، مثلاً طبق عبارت‌های 2^n یا 5^n یا $3n^2 \times 4^n$ زیادشود، این دستورالعمل یك‌آلگوریتم با زمان نمایی نامیده می‌شود.

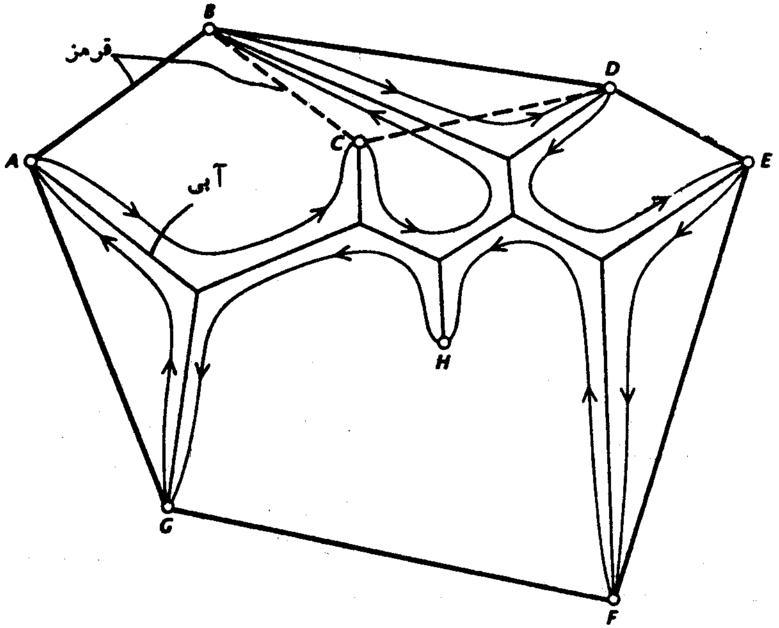
گرچه برای مسایل کوچك آلگوریتم‌های با زمان چندجمله‌ای ونمایی هردو کارآمد هستند، درمسایل بزرگ، زمان لازم برای یافتن جواب به‌کمك آلگوریتم‌های با زمان نمایی به قدری زیاد است که این آلگوریتم‌ها هیچ گونه کارآیی نمی‌توانند داشته‌باشند [نگاه‌کنید به‌مقالهٔ «کارایی آلگوریتم‌ها» نوشتهٔ هری‌د. لویس و کریستوس هـ. پاپادیمیتریو؛ همین‌مجله،ژانویهٔ۱۹۷۸]. درمورد مسایل به‌قدرکافی بزرگ، یك آلگوریتم با زمان چندجمله‌ای، که حتی روی‌کندکارترین کامپیوترانجام شود، به‌مراتب سریعتر از آلگوریتمی با زمان نمایی‌که روی یك ابرکامپیوتر انجام شود، جواب خواهد داد. تاکنون چندین‌آلگوریتم بازمان نمایی برای مسالهٔ اشتاینر یافته‌اند (مثلاً آلگوریتم ملزاك)، ولی هنوز هیچ آلگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای آن یافته نشده است. چشم‌انداز یافتن یك آلگوریتم کارامد هم به هیچ وجه روشن نیست. در سال ۱۹۷۱، استفن آ. کوك از دانشگاه تورونتو ثابت‌کردکه اگر برای هرمسالهٔ منفرد از دسته مسایلی‌که امروزه مسایل سخت با رتبهٔ آماری نمایی خوانده می‌شوند، آلگوریتمی بازمان چندجمله‌ای یافته‌شود، ازاین‌آلگوریتم می‌توان به‌طور کارامد برای حل همهٔ مسایل دیگر در ردهٔ بزرگی از مسایل «سخت» مشتمل برمسایل سخت بارتبهٔ آماری نمایی استفاده‌کرد. بعدها یکی از مؤلفین مقالهٔ حاضر (گراهام) طی‌کارمشترکی با مایکل ر. گاری و دیوید س. جانسن از آزمایشگاه‌های شرکت بل ثابت‌کردندکه مسالهٔ اشتاینر یك

مسالهٔ سخت با رتبهٔ آماری نمایی است. از آنجا که تاکنون تلاش‌های هزاران پژوهشگر درمورد هیچ یك ازمسایل سخت با رتبهٔ آماری نمایی به نتیجه نرسیده، بعید به‌نظرمی‌رسدکه هیچ مسالهٔ چنینی، ازجملهٔ مسالهٔاشتاینر را بتوان به وسیله آلگوریتمی با زمان چند جمله‌ای حل‌کرد. با این همه، اثبات این امرکه مسایل سخت آ. ن. را نمی‌توان به طور کارامد حل‌کرد، مسالهٔ مهم دانش نظری کامپیوتر است.

گرچه بعید به‌نظرمی‌رسدکه آلگوریتم کارامدی با زمان چندجمله‌ای برای یافتن‌کم‌طول‌ترین شبکه‌ها یافته شود،آلگوریتم‌هایی عملی وجود دارد که شبکه‌هایی با طول اندکی بیشتر تولید می‌کنند. یك مثال در این مورد، آلگوریتم مربوط به حل مسالهٔ کوچکترین بافت درختی است که درآن کوتاهترین‌شبکهٔ پاره‌خطهایی جستجومی‌شود،که مجموعه‌ای ازنقاط‌مفروض را بدون افزودن هیچ نقطهٔ جدید به هم وصل می‌کنند. برای حل این مساله دوتا ازنقاط‌مفروض،که بیش ازهمه به‌یکدیگرنزدیکند، به‌هم وصل می‌شود، و در هر مرحلهٔ بعدی نزدیکترین زوج نقاطی که با اتصالشان مسیر بسته‌ای ایجاد نمی‌شود به‌هم وصل می‌شوند. در هرحال، با حذف یالی از یك مسیر بسته، نقاط مفروض می‌توانند هم‌چنان به‌یکدیگرمتصل باقی بمانند.

ادگار ن. گیلبرت و هنری ا. پولاك از آزمایشگاه شرکت بل این حدس را مطرح کرده‌اندکه نسبت‌کم‌طول‌ترین درخت اشتاینر به‌کوچکترین بافت درختی‌حداقل $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است، یعنی درخت اشتاینرحداکثر $\frac{13}{4}$ درصد از کوچکترین بافت درختی‌کم‌طول‌تراست. نسبت $\frac{\sqrt{3}}{2}$ در یك مثال ساده ظاهرمی‌شود: سه‌نقطهٔ مفروض‌که یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازند. گرچه این حدس تاکنون اثبات نشده، چونگ و یکی از مؤلفین مقالهٔ حاضر (گراهام) ثابت کرده‌اندکه طول درخت اشتاینرحداکثر $\frac{17}{6}$ درصد از بافت درختی‌کمتراست.

معمولاً کوچکترین بافت‌های درختی را می‌توان با افزودن سنجیدهٔ نقاط اشتاینروتنظیم‌کردن درخت، ۳تا۴ درصدکوتاهترکرد. یکی از مؤلفان این مقاله (برن) ثابت‌کرده است‌که این نوع آلگوریتم غیردقیق دارای توجیه نظری است، زیرا طول میانگین درخت تنظیم شده اندکی از طول



شیوه‌های هرس‌کنی، کارایی آلگوریتم‌ها را در پیدا کردن کم‌طول‌ترین شبکه‌ها افزایش می‌دهد. یك راه برای هرس‌کردن، یا کنارگذاشتن شبکه‌های ممکن (که به توسط کاکین ابداع شده) درنظرگرفتن ترتیب تماس یك‌کش نواری (خط پر) کشیده شده به دور مجموعهٔ نقاط مفروض، با این نقاط است. کش نواری با همهٔ نقاط بجزC و H تماس خواهد داشت ولی C را می‌توان دراین توالی واردکرد، زیرا زاویهٔ تشکیل شده به وسیلهٔ نقطهٔ C و دو نقطهٔ متوالی دارای تماس با کش نواری، از ۱۲۰ درجه کمتر نیست. پس ترتیب نقاط به صورت ABCDEFG است. یك مسیر بدون گسیختگی (دارای پیکانها) حول یك شبکهٔ ممکن (خطهای راست کم‌رنگ) با نقاط درترتیب ACBDEFHG تماس دارد. چون جای B و C نسبت به‌ترتیب مربوط به‌کش نواری تعویض شده، این شبکه را می‌توان هرس‌کرد.

میانگین کوچکترین بافت درختی کمترخواهد بود.

مسایل کوچکترین بافت درختی و کم‌طول‌ترین شبکه در احداث شبکه‌های تلفن، لوله‌کشی و جاده‌کشی کاربرد داشته‌اند. جوابهای به دست آمده، چه تقریبی باشند و چه دقیق، می‌توانند راهنمایی‌کلی برای آرایش هندسی شبکه و میزان مصالح ضروری باشند. حالات پیچیده‌ترمسالهٔ اشتاینر با مواردی سروکار پیدا می‌کنند که لازم باشد از برخی عوارض جغرافیایی

احتراز شود یا بخواهند روی شبکه‌ای که از قبل موجود است کوتاه‌ترین اتصالها را بیابند.

شاید عملی‌ترین کاربرد مسالهٔ اشتاینردرطراحی مدارهای الکترونیکی باشد. در یك مدار مجتمع، هرچه شبکهٔ سیم‌ها کم‌طول‌تر باشد، برای بار گرفتن و بی بار شدن زمان‌کمتری لازم دارد و در نتیجه سرعت عمل مدار بیشتر می‌شود. البته، مسالهٔ کم‌طول‌ترین شبکه در مدارها دارای یك نوع هندسهٔ خاص خود است، زیرا معمولاً در هرمدار سیم‌ها فقط در دو راستای عمودی وافقی قرار می‌گیرند.

این مساله، که مسالهٔ مستقیم‌الخط اشتاینرخوانده می‌شود. نخستین بار درسال ۱۹۶۵ به توسط موریس هانان از مرکز پژوهش تامس ج. واتسن متعلق به مؤسسهٔ آی. بی. ام. واقع در یورکستاون هایتس نیویورك بررسی شد. جواب حالت مستقیم‌الخط مسالهٔ اشتاینرهم مثل مسالهٔ اصلی اشتاینر، درختی شامل نقاط اشتاینرو نقاط مفروض است، ولی یالها با یکدیگرزاویهٔ ۹۰ یا ۱۸۰ درجه می‌سازند. گرچه می‌توان تصور کرد که نقاط اشتاینر در مسالهٔ مستقیم‌الخط اشتاینردر هرجا قرار بگیرند، هانان ثابت کرد که محدودهٔ مکانی نقاط اشتاینرکم‌طول‌ترین شبکهٔ مستقیم‌الخط را می‌توان مشخص کرد. از هرنقطهٔ مفروض یك خط افقی و یك خط عمودی گذرانده می‌شود و نقطهٔ برخورد هردو خط یك نقطهٔ اشتاینراحتمالی را تعیین می‌کند. دراینجا با یك آلگوریتم می‌توان همهٔ زیرمجموعه‌های ممکن ازنقاط اشتاینررا آزمود، تا کم‌طول‌ترین شبکه محاسبه شود. اما، با افزایش تعداد نقاط مفروض، زمان حل چنین آلگوریتم ناپخته‌ای به طور نمایی زیاد می‌شود. آلگوریتم‌های پیچیده‌تری که هنوز بازمان نمایی هستند می‌توانند مسایل مستقیم‌الخطاشتاینر با حدود ۴۰ نقطه را حل‌کنند.

مسالهٔ کوچکترین بافت درختی‌هم‌یك‌صورت مستقیم‌الخطداردکه به‌طور کارامد با آلگوریتمی حل می‌شود که در هر مرحله کوتاه‌ترین اتصال را انتخاب می‌کند، مگر آنکه این اتصال مسیر بسته‌ای ایجادکند. فرانك ك. هوانگ از آزمایشگاه‌های بل ثابت کرده که درخت مستقیم‌الخط اشتاینر هیچ‌گاه از دو سوم کوچکترین بافت مستقیم‌الخط درختی کم‌طول‌ترنیست.

عجیب‌ترین کاربرد مسالهٔ اشتاینردر زمینهٔ تکامل نـژادی است. دیوید سانکوف از دانشگاه مونرآل وچند پژوهشگردیگر گونه‌ای از مسالهٔ اشتاینر را برای محاسبهٔ شجره‌های احتمالی تکامل نژادی تعریف‌کرده‌اند. این افراد ابتدا پروتئین خاصی را درنظر می‌گیرندکه درهمهٔ جانورانی‌که قرار است رده‌بندی شوند مشترك باشد. آنگاه برای هـر جانور توالی اسیدهای آمینهٔ سازندهٔ آن پروتئین را مشخص می‌کنند و درموقعیتی‌که توسط تعداد تفاوتها بین پروتئین آن جانور و پروتئین سایر جانوران تعیین می‌شود، نقطه‌ای را تعریف می‌کنند. به‌این ترتیب جانورانی‌که این توالی درآن‌ها مشابه است، طبق تعریف نزدیك به‌یکدیگرند و جانوران دارای توالی‌های نامشابه بنا به تعریف از هـم دورند. درکم‌طول‌ترین شبکه برای این آرایش انتزاعی از نقاط مفروض، نقاط اشتاینرمتناظرند با محتمل‌ترین اجداد، و یالها متناظرند با رابطه‌ای بین جانور و یکی از اجدادش، در صورتی‌کـه تعداد جهش‌ها حداقل باشد. ولی ازآنجا که مسالهٔ اشتاینر درگونهٔ مربوط به تکامل نژادی به‌هیچ‌وجه آسان‌تراز سایرمسایل اشتاینرنیست، این مساله ـ جز درحالتی‌که برای تعداد اندکی ازجانوران به‌کار رفته ـ بیشتریك تجربهٔ فکری بوده‌است تایك ابزار عملی پژوهش.

گرچه درسالهای اخیردانش آلگوریتم‌ها پیشرفت زیادی داشته، مسالهٔ کم‌طول‌ترین مدارهم‌چنان شکست‌ناپذیر باقی مانده است. مساله را می‌توان درقالب ساده‌ای بیان‌کرد وهنوز تحلیل جواب‌ها کارساده‌ای نیست. تغییری جزئی درآرایش هندسی مساله ممکن است بی‌اهمیت جلوه‌کند ودرعین‌حال می‌تواندکم‌طول‌ترین شبکهٔ مساله را به‌کلی دگرگون سازد. این حساسیت به نوبهٔ خود سؤالاتی جنبی درموردکم‌طول‌ترین شبکهٔ برانگیخته‌که برسرآن‌ها نیزمجادله می‌شود. کم‌طول‌ترین شبکه طی سال‌های آتی نیز هم‌چنان مـا را تشنه ازلب چشمه بازخواهدگرداند.

ترجمهٔ مهندس محمد باقری