جلد

سی و پنجم

آشنائی با
ریاضیات

خردادماه ۱۳۷۱

آشنایی با ریاضیات (جلد سی و پنجم)

ویراستار : پرویز شهریاری

امورفنی: حسن نیک‌بخت

ناشر: نشر توسعه

تیراژ: ۲۲۰۰ نسخه

چاپ اول: بهار ۱۳۷۱

حروفچینی : مهدی [illegible]

چاپ و صحافی: رامین

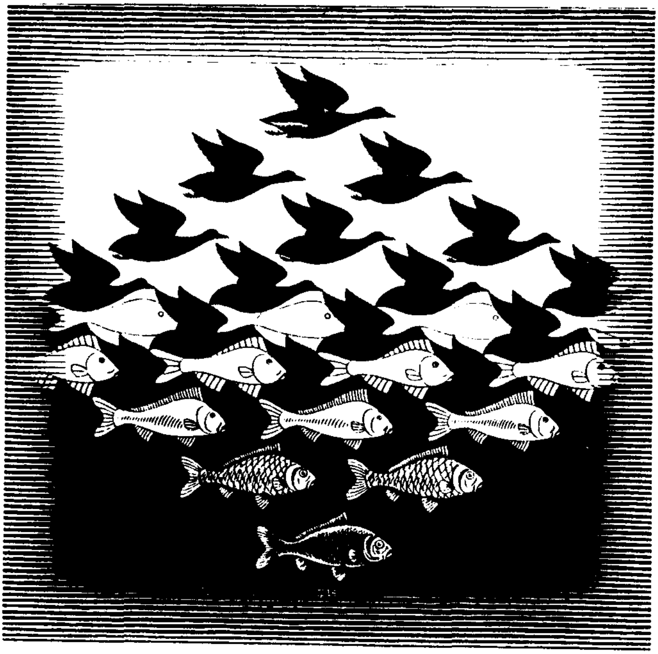
فهرست جلد سی و پنجم

۱۷۶۲

۶۰۰ ریال

پیتر د. لاکس

ریاضیات و کاربردهای آن



گزارش کمیتهٔ دیوید[1] سرآغاز خوبی برای گفتگو پیرامون وضعیت ریاضیات کاربردی است. نتایج عمدهٔ این گزارش به قرار زیر است:

● ریاضیات روزبروز نقش حیاتی‌تری در علوم، تکنولوژی و اجتماع پیدا می‌کند.

● در مقابل، باوجود آنکه کاربردهای ریاضیات طی چند دههٔ اخیر گسترشی انفجارآسا داشته، میزان توجه به حمایت از پژوهشهای آینده‌سازی که این همه فایده به‌بار می‌آورد، سیر نزولی طی کرده است.

---

۱ ــ نگاه کنید به مقالهٔ «صورتبندی نقش عالم: نقش ریاضیات» در مجلهٔ نشر ریاضی سال اول شمارهٔ اول.

● در امر پژوهش ریاضی همواره امکانات بالقوهٔ فراوانی وجود داشته است، ولی به فعل درآوردن آنها مستلزم وجود برنامه‌های جدی تازه‌ای در زمینهٔ پشتیبانی از دانشجویان دورهٔ لیسانس و پژوهشگران جوان و افزایش اوقات پژوهش در دانشکده‌هاست.

گر چه دو نکتهٔ اخیر به طور اخص در مورد محیط آمریکا ذکر شده، بعید نمی‌دانم که در مورد خیلی از کشورهای دیگر هم صادق باشد.

بسیاری از کاربردها و امکانات ریاضیات که در گزارش دیوید آمده (و البته نه همهٔ آنها) مرهون دسترسی به کامپیوترهای بسیار سریع با حافظه‌های عظیم است که دو تحول چشمگیر زیر را در علوم و تکنولوژی پدید آورده است:

● رواج سیستماتیک مدلسازی ریاضی به عنوان جانشینی برای طراحی متکی بر آزمایشهای متعدد.

● توانائی بی‌سابقه برای کسب و ذخیرهٔ مقادیر فوق‌العاده زیاد داده‌ها و بیرون کشیدن اطلاعات نهفته در آنها از طریق اعمال دقیق ریاضی.

تعجبی ندارد که مدل‌سازی ریاضی تا این حد جای آزمایشهای فراوان را گرفته است، زیرا در اغلب موارد ارزانتر، همه جانبه‌تر و قابل اطمینان‌تر است. مثلاً وقتی برای طراحی قسمتهای مختلف هواپیما از تونل باد استفاده می‌شود، برای آزمودن تأثیر هر تغییر خاص باید مدل تازه‌ای در کارگاه ساخته شود؛ ولی برای تغییر طرح در مدل ریاضی کافی است دکمه‌ای را که مقادیر جدید پارامترها را وارد می‌کند بفشاریم. امروزه همهٔ هواپیماهای جدیدی که به پرواز در می‌آیند محصول همین روش طراحی کامپیوتری هستند. این گفته بخصوص در مورد سفینه‌های آزمایشی یا سفینه‌های با اهداف ویژه، از قبیل «شاتل فضایی» صادق است. آموزش نحوهٔ پرواز و فرود به خلبانان شاتل فضایی بدون استفاده از مشابه سازهایی که نیروهای آیرودینامیکی پدید آمده حین راندن سفینه را درنظر می‌گیرند، امکان‌پذیر نبود. این نیروها با حل معادلات اساسی دینامیک گازها، توسط یک کامپیوتر، «درجا» محاسبه می‌شوند. جای تأسف است که رسانه‌های گروهی هنگام ستایش از دستاوردهای این برنامهٔ فضایی، به میزان ریاضیات موردنیاز برای اجرای آن اشاره‌ای نمی‌کنند.

انجام بسیاری از نوآوریهای عظیم دیگر همچون واکنشگر (رآکتور)های پیشرفته از نوع شکافتی، گداختی یا شیمیایی نیز بدون اتکاء به حجم عظیمی از محاسبات امکان‌ناپذیر است. یک نمونهٔ بارز در این مورد، آزمایشهای چارلز پسکین

دربارهٔ کارآیی انواع گوناگون دریچه‌های مصنوعی قلب است که از طریق محاسبهٔ میزان جاری‌شدن خون در محفظهٔ چپ قلب تپنده، از درون دریچهٔ میترال طبیعی و مصنوعی صورت گرفت.

در مورد دومین دستاورد مهم حاصل از کامپیوتر، یعنی ذخیره و پردازش داده‌ها نیز نمونه‌های متعددی می‌توان ذکر کرد که کاربرد کامپیوتر در برنامه‌های کنونی مشاهدات هواشناسی، اقیانوس‌نگاری و اخترشناسی از آن‌جمله است. یک نمونهٔ خیلی جالب، برش‌نگاری (توموگرافی) کامپیوتری است که در آن تعداد خیلی زیادی عکس از بخشهای مختلف بدن انسان که با پرتو ایکس گرفته شده ثبت و ذخیره می‌شود و براساس آنها شکل واقعی اندامهای داخلی بدن به کمک آلگوریتمهای دقیقی بازسازی می‌شود. این آلگوریتمها صورتهای گسستهٔ تبدیلی به‌نام تبدیل «رادون» هستند.

برش نگاری با پرتو ایکس و شیوه‌های جدیدتر آن یعنی تشدید مغناطیسی هسته‌ای[1] (NMR) و برش‌نگاری با گسیل موضعی[2] را در رسانه‌های گروهی معرفی کرده و دربارهٔ اهمیت آنها داد سخن داده‌اند؛ اما دریغ که این رسانه‌ها اشاره‌ای نکرده‌اند به اینکه چه حجمی از ریاضیات که قسمت اعظم آن نیز تازه است در کار برش‌نگاری موردنیاز بوده است.

حالا به نکتهٔ اصلی سخن‌رانیم می‌پردازم:

امروزه ریاضیات کاربردی و محض بیش از هروقت دیگری در ۷۵ سالهٔ اخیر با یکدیگر پیوند تنگاتنگ دارند.

تفکیک ریاضیات به دو بخش کاربردی و محض، پدیده‌ای متأخر ـ و گذرا ـ است. دانشمندانی چون پوانکاره، هامیلتون، ماکسول، استوکس، کلوین، ریلی، بول، گاوس، ریمان، کلاین، هیلبرت و گیبس به هیچ روی تأمل به چنین تفکیکی نبودند. گاوس، فرمانروای ریاضیدان، فرمانروای محاسبه هم بود؛ مثلاً یادداشتهای برجامانده از او نشان می‌دهد که وی از تبدیل سریع فوریه استفاده می‌کرده است.

تنها در قرن بیستم بود که پیشنهاد جسورانهٔ ترسیم خطی عبورناپذیر بین ریاضیات و جهان مادی، عمدتاً توسط گروه بورباکی مطرح شد. این طرز تفکر علاوه بر آنکه اساساً نادرست است، موجب بروز مسائل فلسفی عمیقی در مورد

1 - Nuclear Magnetic Resonance
2 - Position Emission Tomography

داوری ارزشها در ریاضیات نیز می‌شود. آنگاه این سؤال که «ریاضیات خوب کدام است؟» به حیطهٔ قضاوتهای زیبایی‌شناسی ذهن تعلق می‌گیرد و ریاضیات به نقش نوعی هنر ظاهر می‌شود. البته در اینجا حقیقتی هم نهفته است و به‌نظر من ریاضیات به‌عنوان هنر بیش از همه به نقاشی شباهت دارد. در هردوی اینها کشمکشی میان دو خواست در کار است؛ در نقاشی نمایش شکلها و رنگهای جهان مرئی و همچنین ایجاد نقشهای دلپذیر روی یک بوم دو بعدی مطرح است؛ در ریاضیات هم مطالعهٔ قانونهای طبیعت و درعین حال پیوندزدن الگوهای استنتاجی زیبا به یکدیگر موردنظر است. موفقترین ابداعها آنهایی هستند که پهنهٔ شدیدترین کشمکشها بین این دو گرایش باشند؛ کمترین گیرایی وقتی وجود دارد که یکی از این دو جنبه غالب شود، مثل نقاشی از صحنه‌های معمولی یا تجرید محض.

پس از بورباکی بزرگترین قهرمانان تجرید ریاضی از آمریکا برخاسته‌اند. این گرایش به سوی تجرید را بجرأت می‌توان عصیانی علیه سنت پرتوان عمل‌زدگی و عمل‌گرایی در آمریکا دانست. رواج اکسپرسیونیسم انتزاعی در دوران پس از جنگ هم طغیانی از این دست بود.

البته تجریدگرایی افراطی در همهٔ کشورها طرفدارانی داشته است. مثلاً لاندائو اغلب از همکارش پراندل که دانشمند برجسته‌ای در دینامیک سیالات بود با لقب «روغن‌کار» یاد می‌کرد. گ. هـ. هاردی هم کاری جز نکوهش ریاضیات کاربردی نداشت. لوین‌سون روایت کرده است که هاردی جداً از این ادعای دوستش نوربرت وینر مات مانده بود که می‌گفت عامل کشفیاتش در آنالیز همسازها برداشتهای فیزیکی او بوده و بعید نمی‌دانست که این ادعای وینر ژستی بیش نباشد. هاردی در یک پارگراف دلسردکننده از کتابش به نام «دفاعیهٔ یک ریاضیدان» از بی‌کاربرد بودن ریاضیات ابراز شادمانی می‌کند و از نظریهٔ زیبای اعداد گنگ نام می‌برد که هیچ‌گاه نمی‌توانسته کاربردی در مهندسی داشته باشد؛ از این نادرست‌تر ادعایی نمی‌توان کرد!

البته دیگران هم در این میان خاموش نبودند؛ جان‌لیتل وود نسبت به ریاضیات دیدگاهی بسیار گسترده‌تر از همکارش داشت. ویل و کورانت هم همان‌قدر با سنت لاندائو مخالف بودند که جین‌لری پایه‌گذار نظریه نوین شارش وُشکسان (جریان لزج) با مرام بورباکی در تضاد بود. حتی در آمریکا آنالیزدانهای یکه‌تازی چون بیرکف و نوربرت وینر تاحد زیادی از فیزیک تأثیر گرفتند و این گفته در مورد بعضی مهاجران جوانتر نیز صادق است.

بارزترین چهرهٔ نیمهٔ قرن حاضر جان فون نویمان است. وی فلسفهٔ ریاضی خاص خود را در مقاله‌ای که در سال ۱۹۵۶ منتشر شد، به‌روشنی بیان کرده که جا دارد در اینجا هم آن را نقل کنیم:

«اندیشه‌های ریاضی ریشه در تجربه دارند...؛ وقتی این اندیشه‌ها به ذهن خطور کردند، آن موضوع زندگی ویژهٔ خودش را آغاز می‌کند... . هرچه یک شاخهٔ ریاضیات از منشاء تجربی خود دورتر شود جنبهٔ زیبایی ناب در آن شدت می‌گیرد... ؛ در فاصله‌ای عظیم از منشاء تجربی یا پس از مدتها زاد و ولد تجریدی، موضوع ریاضی در معرض خطر تباهی واقع می‌شود.»

در آثار نویمان، گرایش او بلکه تشنگی او را نسبت به سرچشمه‌های تجربی ریاضیات نوین بروشنی می‌توان احساس کرد. او در زمینه‌های محضی چون نظریهٔ عملگرها، منطق، نظریهٔ اندازه‌ها و گروههای پیوسته کشفیات اساسی داشته است. درعین حال، کشفهایی به همین جالبی نیز در مکانیک کوانتومی، هواشناسی، نظریه مونت‌کارلو، جبر خطی عددی، دینامیک عددی گازها، معماری کامپیوتری، نظریهٔ برنامه‌ریزی، اتوماتها و نظریهٔ کارکرد مغز انجام داده است.

فون نویمان در یک سخن‌رانی پیشگویانه که به سال ۱۹۴۵ در مونرآل عرضه شد چنین نتیجه گرفت که «ابزارهای محاسباتی با سرعت و کارآیی خیلی زیاد ممکن است در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی و خیلی دیگر از زمینه‌هایی که امروزه دشوار یا کاملاً دست‌نیافتنی‌اند آن چنان سرنخهای الهام‌بخشی که در همهٔ بخشهای ریاضیات برای پیشرفت واقعی لازمند به ما بدهند.»

دقیقاً به همین شیوه هم بود که فرمی، پاستا و اولام رفتار تقریباً دوره‌ای ارتعاش زنجیرهای غیرخطی را کشف کردند و کروسکال و زابوسکی به کشف چگونگی پیدایش و کنش متقابل سولیتونها نایل آمدند. قابل حل‌بودن کامل شبکهٔ تودا نیز مدیون محاسبات عددی بسیار دقیق جوفورد است. میچل فایگنباوم قوانین کلی جالبش را در مورد بارستها از طریق تحلیل آزمایشهای عددی کشف کرد. بررسیهای عددی، ای. لورنتس را به مفهوم ربایندهٔ غریب رهنمون شد؛ توجیه رفتار آشوبناک دستگاههای دینامیکی ساده در مجاورت جزیره‌های پایداری به کمک بررسیهای عددی پیشرفتهای زیادی کرده است. پس این پیشگویی فون نویمان بیراه نبوده است، بخصوص اینکه کامپیوترهایی که وی در سال ۱۹۴۵ از آنها سخن گفته در آن ایام صرفاً زاییدهٔ تخیل او بودند.

درهمین حال، محاسبه به صورت شیوهٔ رایجی در ریاضیات محض نیز درآمده است. زمانی لژاندر و گاوس برای تخمین چگونگی توزیع مجانبی اعداد اول از جدولهای اعداد اول استفاده کردند. با ظهور کامپیوترهای جدید، جستجوی قانونهای مجانبی با بیشترین کارآیی ممکن می‌تواند دنبال شود و دنبال می‌شود. وضع در مورد ریشه‌های تابع زتای ریمان نیز به همین منوال است. اخیراً وان درلون و ریل نشان داده‌اند که تابع زتا دقیقاً ۳۰۰/۰۰۰/۰۰۱ ریشه دارد که جزء موهومی‌شان بین ۰ تا ۱۱۹/۵۹۰/۸۰۹/۲۸۲ واقع است و جزء حقیقی همهٔ آنها $\frac{1}{2}$ است. موستو برای تشکیل دامنه‌های بنیادی مربوط به نوع خاصی از گروههای گسسته، محاسبات زیادی انجام داده است. این محاسبات در اثبات نهایی وارد نمی‌شوند ولی برای کشف آنچه باید ثابت شود لازم بودند. درمقابل، در برهانی که اخیراً لنفورد برای برخی حکمهای عرضه‌شده توسط فایگنباوم فراهم آورده، محاسبات جزئی از ساختار منطقی استدلالند. این گفته در مورد اثبات قضیهٔ چهاررنگ که آپل وهاکن آن را به کمک کامپیوتر تهیه کردند نیز صادق است.

عده‌ای ایراد گرفته‌اند که برهان فوق هیچ احساسی در زمینهٔ علت درست‌بودن نتیجه در شخص پدید نمی‌آورد. این انتقاد وارد است ولی عین همین ایراد را به خیلی اثباتهای غیرکامپیوتری هم می‌توان گرفت. عدهٔ دیگری این انتقاد را مطرح کرده‌اند که برهان مذکور دشوارتر از آن است که خواننده بتواند به‌تنهایی از عهدهٔ تحقیق درستی آن برآید. این حرف درست است، ولی همین مشکل عیناً درمورد استدلالهای دست‌نویس چند هزار صفحه‌ای و پیچیده نیز وجود دارد. کسانی هم هستند که اساساً برهانهای کامپیوتری را قبول ندارند. این طرز فکر به نظر من کاملاً غلط است. بالاخره، منطق‌دانها می‌پذیرند که استدلال ریاضی خدشه‌ناپذیر، استدلالی است که ماشین تورینگ قادر به انجام آن باشد. به هرحال معقول به‌نظر نمی‌رسد که برهانهای تهیه‌شده توسط کامپیوترهای خیالی را بپذیریم ولی در پذیرش برهانهایی که توسط یک کامپیوتر واقعی انجام شده سرسختی به خرج دهیم.

در تفسیر معنای آنچه از محاسبه حاصل‌شده، وجود صفحهٔ تصویر خوب display ضروری است؛ در غیر این‌صورت شخص بناچار با انبوهی از لیست‌های بالابلند روبرو می‌شود که درک و هضم آنها کار آسانی نیست. هندسه‌دانهایی که روی مسائل سه‌بعدی کار می‌کنند به‌طور فزاینده‌ای از صفحات تصویر استفاده می‌کنند. پژوهشگرانی هم که با نگاشتهای پیچیده سروکار دارند، مثل نگاشتهای

گویایی که منجر به مجموعه‌های جولیا می‌شوند، از همین امکان سود می‌جویند.

کاربرد دیگر کامپیوتر، انجام اعمال سریع و مطمئن روی فرمولهای جبری است که ازحد توانایی و حوصلهٔ انسان خارج است. یک نمونهٔ قدیمی در این مورد محاسبهٔ کمیتهای پایستهٔ (باقی) نامتعارف درجه‌های هفت تا دوازده برای معادلهٔ KdV است که رابرت میورا آن را به کمک ماشین محاسبه کرد. پیش از وی، کروسکال و زابوسکی این محاسبه را به‌طور دستی برای درجه‌های چهار تا شش انجام داده بودند. سرانجام س. گاردنر با استدلالهای نظری ثابت کرد که دنبالهٔ بی‌پایانی از این کمیتهای پایسته وجود دارد.

اتکای پژوهشگران هر دو بخش کاربردی و محض ریاضیات به محاسبات، موجب پیدایش پیوند عملی ملموس بین آنها شده است. هردوی آنان به ابزارهای محاسباتی قابل اطمینان نیاز دارند؛ ابزارهایی برای ترسیم نمودارها و دستکاری فرمولها که درعین حال کارکردن با آنها آسان باشد. آنها برای نیل به این خواسته، یاور مشترک و گاهی دشمن مشترکی دارند که عبارت است از: مرکز محاسبات.

البته مهم‌ترین پیوند بین ریاضیات محض و کاربردی نوعی پیوند ذهنی است: کاربردها مسائل تازه‌ای پیش می‌کشند و در بخش نظری ابزارهایی برای حل پاره‌ای از این مسائل جدید ابداع می‌شود. در اینجا به چند نمونهٔ متأخر اشاره می‌کنیم.

الف) نظریهٔ معروف KAM[1] که برای پاسخ‌گویی به تعداد بسیار زیادی از سوالهای مطرح شده در مکانیک کلاسیک به کار رفته است. تکان‌دهنده‌ترین اینها رد فرضیهٔ همه‌سویی (ارگودیک) بود که در مکانیک آماری نقش اساسی برایش قائل می‌شدند.

ب) مفهوم بُعد هاوسدورف رفتار جوابهای معادلهٔ ناویر-استوکس در فضای سه‌بعدی را تاحدی روشن کرد، گرچه هنوز ابهامها کاملاً برطرف نشده است. درمورد هموار‌بودن این‌گونه جوابها اطلاعی نداریم، اما شفر توانست نشان دهد که تکینی‌های این جوابها در صورت موجودبودن باید در مجموعه‌هایی با بعد هاوسدورف کمتر از

۱- نام این نظریه از حروف اول سه ریاضیدان به نامهای کولموگوروف Kolmogorov ، آرنولد Aronold و موزر Moser گرفته شده است. برطبق این نظریه، پریشیدگیهای به‌قدرکافی کوچک، مسیرها را در قسمت کوچکی از فضای فاز ارگودیک می‌کنند و بخشی از فضای فاز غیرقابل نفوذ باقی می‌ماند. با میل‌کردن دامنهٔ پریشیدگی به صفر، دستگاه دینامیکی به حالت کاملاً تناوبی درمی‌آید. پوانکاره احتمالاً معتقد بوده که کوچکترین پریشیدگی حول حالت کاملاً تناوبی، تمامی فضای فاز را ارگودیک می‌کند.

سه واقع باشند.

مفهوم بُعد هاوسدورف در بررسی تکنیکی‌های مربوط به شارشهای ایده‌آل ناوشکسان (غیرلزج) نیز ظاهر می‌شود. به ازای مقادیر کم عدد رینولدز، جوابهای معادلهٔ ناویر ـ استوکس رفتار پایدار دارند یعنی با میل‌کردن t به بینهایت به‌یک جواب مانای یکتا میل می‌کنند. به‌ازای مقادیر بزرگ عدد رینولدز، مشاهده می‌شود که جوابها حول مجموعه‌هایی به نام رباینده می‌پیچند. فوایا، تمام، کنستانتین و ویشیک ثابت کرده‌اند که این مجموعه‌های رباینده در یک فضای تابعی مناسب دارای بعد هاوسدورف متناهی هستند؛ وقتی عدد رینولد به بینهایت میل کند، این بعد هم به بینهایت میل می‌کند. این نتایج ما را به‌درک رمز وراز تلاطم یک‌گام نزدیکتر می‌کند.

پ) نظریهٔ زیبا و متهورانهٔ رنه تام دربارهٔ تکینی‌ها با خارج‌شدن از دست فریبکاران و سفسطه‌گران، در حال تبدیل به ابزار مفیدی با کاربردهای مناسب است.

برای اثبات یکپارچگی ریاضیات هیچ برهانی قانع‌کننده‌تر از این نیست که مفاهیم مطرح‌شده در یک حوزه، برای حل مسائل مهمی از یک حوزهٔ ظاهراً نامرتبط دیگر نقش اساسی می‌یابند. این نکته بخصوص وقتی شگفتی خود را نشان می‌دهد که مفهومهایی از ریاضیات کاربردی در پاسخگویی به سؤالهایی از ریاضیات کاملاً محض به‌کار می‌آیند. بد نیست به چند مورد نسبتاً تازه اشاره کنیم:

ت) برخی سیستمهای کاملاً حل‌شدنی در دینامیک سیالات توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده است. بخصوص دوبروین ثابت کرده که جوابهای معادلهٔ کادومتسف ـ پتو یا شیویلی در مورد موجهای سطحی، با ماتریسهای دورهٔ ریمان در نظریه سطوح ریمان ارتباط نزدیکی دارد. آربالو و دوکونچینی بااستفاده از این ارتباط به حل یک مسئله کلاسیک از شوتکی راجع به ماتریسهای ریمان توفیق یافته‌اند.

ث) سیمون دونالدسون نظریهٔ میدانهای یانگ میلز را برای اثبات وجود ساختارهای دیفرانسیل نااستانده در چهار بعد به‌کار گرفته است.

ج) گلفاند طی خطابه‌اش در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات به سال ۱۹۶۲ در استکهلم متذکر شده است که «تابعهای زتای فضاهای همگن کاملاً مشابه ماتریسهای اس (S) هایزنبرگ هستند.» اندکی پس از آن فادیف و پاولوف با یافتن معادلهٔ موجی که عملگر پراکندگی وابستهٔ آن یک تابع زتا است، نشان دادند که موضوع صرفاً به‌مشابه‌بودن ختم نمی‌شود.

ترجمهٔ : محمد باقری