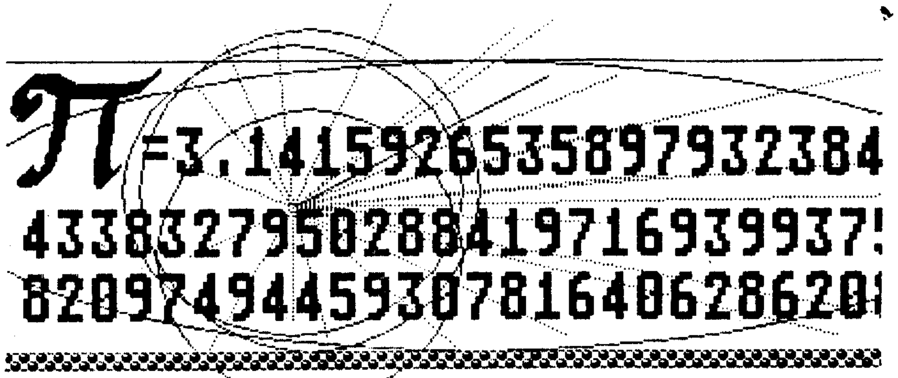
عدد جادویی پی در کمند ریاضیدانان (با کورس ضیائی)، تام راترز، دانشمند، سال ۲۸، شمارهٔ ۴، تیر ۱۳۶۹، ص ۶۶-۶۹.

۵۶



عدد جادویی پی در کمند ریاضیدانان

نوشتهٔ تام واترز
ترجمهٔ کورس ضیائی ـ محمد باقری

سه رقمی که روی سنگ قبر دورافتاده‌ای درکلیسای سنت پیتر در لیدن (هلند) کنده شده بود آشکارا آخرین دستیافتهٔ ریاضیدانی هلندی را عرضه می‌کرد. این رقمها ۸ـ۸ـ۲ بودند. سنگ قبر به لودلف وان کولن، استاد دانشگاه لیدن تعلق داشت که در سال ۱۶۱۰ به درود حیات گفت. وان کولن بخش عمده‌ای از زندگی خود را وقف محاسبه عدد پی (π) کرده بود، همان عدد مرموزی که وقتی در قطر دایره ضرب شود اندازهٔ دقیق محیط دایره را معلوم می‌سازد. اعداد موجود بر روی سنگ قبر او سی‌وسومین و سی‌وچهارمین و سی‌وپنجمین رقم اعشاری عدد پی بودند.

عدد پی، این پرآوازه‌ترین اعداد، عدد اعشاری غیرمتناوبی است و آن را فقط به طور تقریبی می‌توان نمایش داد. در سومین قرن پیش از میلاد، ارشمیدس مقدار عدد پی را $\frac{۲۲}{۷}$ گرفت، و این کسر دقت لازم را برای مصارف عملی دارا بود. در واقع، مردم روزگار باستان این مقدار را برای ساختن پیچهای ارشمیدس ـ پمپهای آب حلزونی ـ که هنوز در دورهٔ ما نیز ساخته می‌شود به کار می‌بردند.

در دستگاه اعشاری، تقریب ارشمیدس تا سه رقم (۳/۱۴) دقت دارد. با آنکه دیر زمانی است که عدد پی را می‌توان با وقت بسیار بیشتری در نظر گرفت، هنوز مردم زیادی آن را با سه رقم به کار می‌گیرند. در واقع امروزه آن را با ۱۰۵۱۱۹۶۶۹۱، ۱ رقم می‌توان به کار برد ولی نوشتن چنین عددی به دسته‌ای از کاغذ کامپیوتر با ارتفاع نزدیک به ۳۸ متر نیاز دارد. دیوید چودنوفسکی پژوهشگر نظریهٔ اعداد که امسال به کمک برادرش گرگوری به رکورد یک میلیارد رقمی دست یافت اظهار می‌دارد "نوار مغناطیسی مناسبترین وسیله برای ثبت این ارقام است" (عدد را روی میکروفیش نیز ثبت خواهند کرد، به طوری که در روی هر یک از ۲۰۰۰ قطعه فیلم ۵۰۰،۰۰۰ رقم کوچک جای گیرد. در این صورت وزن عدد بالغ بر ۴۶ کیلوگرم می‌شود.)

کسانی که با این صدها میلیون رقم سروکار دارند یکسره عبارتند از ریاضیدانها، به همراه عدهٔ کمی از برنامه‌نویسهایی که برای آزمایش کارکرد کامپیوتر خود از بزرگترین اعداد موجود بهره می‌گیرند. تردید دارم که در طول تاریخ، هرگز مهندسی، عدد پی را با بیش از ۲۰ رقم اعشاری، یعنی با دقتی که در سال ۱۵۹۶ در دسترس بود به کار برده باشد. در همین سال بود که وان کولن مقاله‌ای منتشر کرد و عدد پی را با دقت فوق محاسبه کرد، و در این محاسبه از روشی سود جست که ارشمیدس آن را ابداع کرده بود.

روش ارشمیدس نسبتا ساده است. داخل دایره‌ای به قطر واحد، یک چند ضلعی با بیشترین

تعداد ضلعهای ممکن رسم می‌کنیم، آنگاه به محاسبهٔ محیط آن می‌پردازیم. هر چه تعداد ضلعهای این چند ضلعی بیشتر باشد به دایره شبیه‌تر است و محیط آن با تقریب بهتری به پی نزدیک است. برای مثال در شش ضلعی مقدار تقریبی پی، ۳ به دست می‌آید. اشکال این روش آن است که محاسبهٔ هر مقدار بعدی کار خیلی زیادی می‌برد. اگر بخواهیم پی را حدوداً ۳/۱۴ درآوریم به یک شکل ۹۶ ضلعی نیاز خواهیم داشت. وان کولن برای رسیدن به عدد پی بیست رقمی، از یک شکل ۳۲۲۱۲۲۵۴۷۲۰ ضلعی استفاده کرد. او اعلام کرد "هرکس بخواهد، می‌تواند از این هم جلوتر رود."[1]

در ابتدای قرن هفدهم وان کولن تنها کسی بود که چنین چیزی را می‌خواست. در اثری که زنش پس از مرگ او انتشار داد وی مقدار جدیدی برای پی با ۳۲ رقم اعشاری عرضه کرد. طبق گفتهٔ یکی از شاگردانش، قبل از وفات، سه رقم دیگر هم به آن افزود، همان ۸ـ۸ـ۲ که روی سنگ قبر او نقش بسته است.

یک قرن پس از وان کولن انقلابی در محاسبهٔ پی رخ داد. ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال به ریاضیدانان امکان داد که راههای بسیار جدیدی برای بیان کردن پی بر حسب معادلات گوناگون بیابند. اما این عبارتها همه طول نامحدودی دارند. معروفترین آنها که به وسیلهٔ گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس در سال ۱۶۷۴ کشف شد سری بی‌پایان زیر بود:

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\dots$$

این سری نیز مانند چندضلعیهای ارشمیدس مشکلاتی دارد. تعداد زیادی جمع و تفریق لازم است تا عبارت دقت لازم را به دست آورد. اگر تا کسر $\frac{۱}{۲۱}$ پیش رویم به عدد ۳/۲ می‌رسیم. چنین روشی چندان به صرفه نیست.

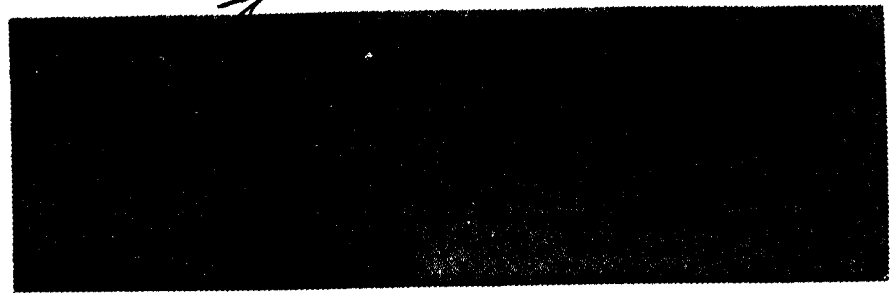
دیگران سعی کردند این فرمول را اصلاح کنند و آن را عملیتر سازند. در سال ۱۷۰۶ یان ماخین سری دیگری کشف کرد که فقط در سه جمله به عدد ۳/۱۴۱۶ می‌رسید. این مقدار برای طراحی موتور اتومبیل دقت کافی را دارد. ماخین خود تا ۱۰۰ رقم اعشار را محاسبه کرد که در آن زمان رکوردی محسوب می‌شد و فرمول او تا زمانی دراز در قرن بیستم هم تازگی و اهمیت خود را حفظ کرد. مثلا در سال ۱۹۴۹ اولین کامپیوتر الکترونیکی جدید به نام انیاک (ENIAC) درست با همین فرمول، پس از صرف ۷۰ ساعت وقت برای محاسبه، عدد پی را با ۲۰۳۷ رقم اعشاری به دست آورد.

برای رسیدن به میزان دقت موجود در زمان حاضر، هم معادلات مربوط به پی و هم کامپیوترها می‌بایست بهبود زیادی می‌یافتند. برادران چودنوفسکی محاسبات خود را بر پایهٔ معادله‌ای غول پیکر، که بخوبی ارزش پیچیدگی خود را داشت بنا کردند. این معادله سریعتر از هر معادلهٔ دیگری که تاکنون یافته شده به سوی پی میل می‌کند. محاسبه به شکل جمع پیاپی جمله‌ها انجام می‌شود. پس از آنکه یک بار فرمول را به کار بردید از نتیجهٔ به دست آمده به‌عنوان نقطهٔ شروع مرحلهٔ بعدی استفاده می‌کنید و همین روند تکرار می‌شود. با استفادهٔ مجدد از فرمول، ۱۴ رقم صحیح دیگر برای پی به دست می‌آید و طی هر مرحلهٔ بعدی ۱۴ رقم جدید تعیین می‌شود.

برادران چودنوفسکی برای آنکه بتوانند برنامهٔ خود را اجرا کنند و رکورد تازه‌ای به جا بگذارند دایما در مراکز اَبَرکامپیوتر در سراسر کشور رفت‌وآمد داشتند. اغلب در ساعات نیمه شب کار می‌کردند و با استفاده از کامپیوترهای موجود ۷۲ میلیون بار پیاپی معادلهٔ مذکور را اعمال کردند. ناگفته نماند که این تعداد تنها مربوط به مراحلی است که کار با موفقیت پیش می‌رفت. در جریان کار، سه بار "دیسک سخت" آنها شکست و آنها را میلیونها رقم به عقب برگرداند.

کاری که برادران چودنوفسکی کرده‌اند صرفا به جا گذاشتن یک رکورد کوتاه مدت نیست، بلکه پایان یک دوران در محاسبهٔ پی به شمار می‌آید. در همهٔ روشهای قبلی که با استفاده از کامپیوتر انجام می‌شد کار از اول خط آغاز می‌گشت. مثلا یاسوماسا کانادا در سال ۱۹۸۸ برای محاسبهٔ ۲۰۱ میلیون رقم (که رکورد قبلی بود) نمی‌توانست

۱. غیاث‌الدین جمیشد کاشانی، در *رسالهٔ محیطیه* روش هوشمندانه‌ای برای محاسبهٔ عدد پی بیان کرده و مقدار این عدد را تا دقت ۱۶ رقم اعشاری یافته است. کاشانی برای این منظور، محیط دایره را نصف مجموع محیط چندضلعیهای منتظم محیطی و محاطی دارای ۳×۲^{۲۸} ضلع فرض کرده است ـ م.



کار را از ۱۳۴ میلیون رقمی که در سال ۱۹۸۷ یافته بود شروع کند. بلکه باید از آغاز حرکت می‌کرد. ولی از این پس ریاضیدانان با استفاده از روش برادران چودنوفسکی می‌توانند کار را با عدد تثبیت شده‌ای آغاز و صرفا ادامهٔ آن را دنبال کنند. دیوید چودنوفسکی می‌گوید "اگر کسی بخواهد یک کپی از نوار مغناطیسی ما بردارد و چهارده رقم به‌آن بیفزاید با یک ماشین حساب جیبی هم قادر به این کار خواهد بود".

علت این امتیاز، مناسبتر بودن معادلهٔ جدید برای انجام محاسبه است. گرچه کامپیوترها به محاسبهٔ پی سرعت زیادی بخشیده‌اند. این اشکال در کارشان هست که گاهی کسرها را گرد می‌کنند. اگر کامپیوتر ۱ را بر ۳ تقسیم کند جوابی به‌صورت ۰/۳، ۰/۳۳۳، ۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳ یا نظیر آن خواهد داد. در هر حال همهٔ ۳های بعدی نادیده گرفته شده و برای همیشه حذف می‌شوند. به همین سبب ریاضیدانهایی که سری بی‌پایانی از کسرها (مثلا معادلهٔ لایب‌نیتس) را به کار می‌برند باید قبلا مشخص کنند که با چند رقم اعشاری کار خواهند کرد. به این ترتیب در پایان محاسبه، مقدار زیادی اطلاعات که می‌توانست در محاسبهٔ یک رقم دیگر از پی موثر باشد دور ریخته شده است.

در معادلهٔ چودنوفسکی، با وجود غول‌پیکر بودنش، تا پایان محاسبه، پای گرد کردن کسرها به میان نمی‌آید. به عبارت دیگر، در روش چودنوفسکی هیچگاه اطلاعات مفید دور ریخته نمی‌شود.

این دو برادر روش خود را به دلیل دیگری هم دوست دارند. به نظر آنها عبارتهایی با اعداد صحیح با سرشت عدد پی بهتر جور در می‌آید. دیوید می‌گوید "در کار با اعداد صحیح صرف، آدم احساس می‌کند که مستقیما با حساب در تماس است."

در واقع انگیزهٔ اصلی این دو تن‌هم جستجوی سرشت عدد پی بوده است. گرچه رکورد برادران چودونوفسکی آنان را در ردیف رکورد شکنان دیگری چون راجر ماریس (که در یک دوره مسابقات بیس بال ۶۱ امتیاز به دست آورد) و سر ادموند هیلاری (نخستین فاتح اورست که به ارتفاع ۲۹۰۲۸ پا صعود کرد) قرار می‌دهد، آنان دلبستگی چندانی به این امتیاز ندارند. دو برادر تاکید می‌کنند که علت پرداختن آنها به این محاسبات آن است که ناگزیر به انجام چنین کاری هستند. آنها همهٔ آن ارقام را برای ادامهٔ کارشان در کاوش سرشت عدد پی لازم دارند و امیدوارند که از این راه بتوانند تکلیف برخی سوالهای پاسخ نیافته در نظریهٔ اعداد را روشن کنند.

مهمترین این سوالها مربوط است به اینکه ارقام پی تا چه حد به دنباله‌ای[2] تصادفی شباهت دارند. یکی از راههایی که ریاضیدانها برای تعریف تصادفی بودن زنجیره‌ای از اعداد دارند، با کامپیوتر انجام می‌شود: عدد واقعا تصادفی عددی است که نتوان آن را با یک برنامهٔ کامپیوتری کوتاهتر از خود عدد تولید کرد.

برنامهٔ کامپیوتری برادران چودنوفسکی به رغم پیچیدگی‌اش برنامهٔ بسیار کوتاهی است و در فرصت کافی می‌تواند هر تعداد از ارقام پی را تولید کند. پس با این آزمون، موضوع تصادفی بودن عدد پی‌منتفی می‌شود.

اما جمع وسیعتری از اعداد هم وجود دارد که ممکن است پی هم جزو آنها باشد. ریاضیدانها عددی را بهنجار (نرمال) می‌نامند که احتمال ظهور هر دنباله‌ای از ارقام در آن یکسان باشد. به عبارت دیگر، هر یک از ارقام ۰ تا ۹، در ۱۰ درصد اوقات ظاهر شوند، هر یک از دنباله‌های دو رقمی ۰۰ تا ۹۹، در ۱ درصد اوقات، هر یک از دنباله‌های سه رقمی ۰۰۰ تا ۹۹۹ در ۰/۱ درصد اوقات، الی آخر. مفهوم بهنجار بودن به مفهوم تصادفی بودن بسیار نزدیک است، به طوری که در گفتگوی عادی گاهی منظور ریاضیدانها از "تصادفی" همان "بهنجار" است.

ریاضیدانها حدس می‌زنند که عدد پی بهنجار باشد ولی به قول دیوید "اثبات آن بسیار دشوار است". یکی از راههای تحقیق این نکته، بررسی تعداد بسیار زیادی از ارقام است. وی می‌گوید "ما مشخصا یک میلیارد رقم را در نظر می‌گیریم. ولی به اعتقاد ما حتی برای یک تحلیل آماری نیم‌بند، ده میلیارد رقم لازم است. خیلی خطرناک و غیرعاقلانه خواهد بود اگر تنها بر اساس یک میلیارد رقم داوری کنیم. یک میلیارد حتی از تعداد جمعیت چین کمتر است".

اما برادران چودنوفسکی بیش از این به گردآوری آنچه خود "داده‌های تجربی" می‌نامند ادامه نخواهند داد. آنها تصمیم گرفته‌اند خط پایان را در مرز یک میلیارد بکشند. دیوید می‌گوید: "اگر کسی این کار را برایمان انجام دهد اشکالی ندارد ولی ما دیگر خسته شده‌ایم". در واقع این دو برادر روش خود را پنج سال پیش منتشر کردند، به این امید که کسی پیدا شود و رشتهٔ کار را از دست آنها بگیرد. گرگوری می‌گوید: "راستش را بخواهید، ما این محاسبات را کردیم چون هیچ کس دیگری نمی‌کرد." □

Discover, Jan. 1990

۲. دنباله (sequence) تعداد محدود یا نامحدودی از جملات است که به ترتیب معینی به دنبال هم قرار گرفته‌اند. تصاعدهای هندسی و حسابی انواع خاصی از دنباله هستند ــ م.