روزنه ای به فضاهای **n بعدی**، *دانشمند*، سال ۲۸، شمارهٔ ۲، اردیبهشت ۱۳۶۹، ص ۶۴–۷۰.

روزنه‌ای به فضاهای n بُعدی

نوشته‌ٔ مهندس محمد باقری

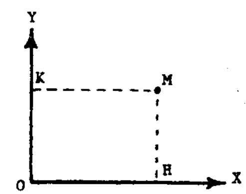
شاید تا کنون نام فضاهای n بعدی یا شکلهای هندسی n بعدی به گوشتان خورده باشد. فضایی که در آن به سر می‌بریم طبق مدلی که درهندسه‌ٔ اقلیدسی بیان می‌شود و تصورش برای ذهن ما راحت‌تراست، یا بیش‌از همه بدان عادت داریم، یک فضای سه‌بعدی است که درآن تنها سه امتداد دوبه‌دو را عمود بر هم می‌توان تجسم کرد. مثلا می‌توان از حرکت در طول، عرض و ارتفاع سخن گفت و اگر دو سوی ممکن برای حرکت روی یک راستا را هم در نظر بگیریم آنگاه به جهات ششگانه یعنی جلو، عقب، راست، چپ، بالا و پایین خواهیم رسید.

فیزیکدانان زمان را هم به عنوان بعد چهارم در نظر گرفته‌اند ولی تجربه‌ٔ حسی ما حکم می‌کند که در این صورت این بعد چهارم از جنس سه بعد دیگر نیست. در داستان علمی ـ تخیلی **ماشین زمان** نوشته‌ٔ هـ.ج.ولز نویسنده‌ٔ نامدار و انساندوست انگلیسی از ماشینی صحبت شده که مسافر خود را در امتداد زمان جابه‌جا می‌کند.

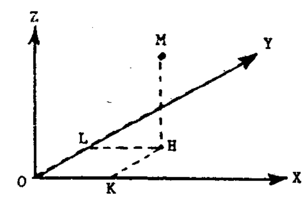
کسانی که با هندسه‌ٔ تحلیلی آشنا باشند می‌دانند که در فضای n بعدی، وجود n محور مختصات برای مشخص کردن محل آن نقاط در فضا کافی است. مثلا روی خط‌راست که فضای یک بعدی است با داشتن **طول** هر نقطه (عددی جبری که فاصله‌ٔ آن نقطه تا مبدا و سوی بردار از مبدا تا آن نقطه را نشان می‌دهد) می‌توان محل آن را دقیقا مشخص کرد.

برای انجام این کار در صفحه که فضایی دو بعدی است، دو محور لازم است که معمولا به لحاظ ساده‌تر شدن محاسبات، عمود بر هم اختیار می‌شوند. با داشتن مختصات نقطه نسبت به این دو محور می‌توانیم محل نقطه را در صفحه بدقت مشخص کنیم. این دو عدد جبری **طول** و **عرض** نقطه خوانده می‌شوند.

OM طول نقطه‌ٔ M است



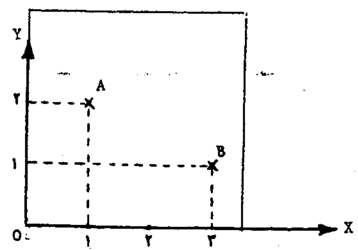
OH و OK و طول و عرض نقطه‌ٔ M هستند



OK و OL و HM به‌ترتیب طول و عرض و ارتفاع نقطه‌ٔ M هستند

مشابه این کار در فضای سه‌بعدی هم انجام می‌شود که در آن مختصات سه‌گانه‌ٔ نقاط یعنی **طول و عرض و ارتفاع** (که با حروف x و y و z نشان داده می‌شود) محل هر نقطه را تعیین می‌کند.

برای تجسم اینکه چگونه می‌توان در ادامه‌ٔ این روند، زمان را هم بعد چهارم دانست کافی است علاوه بر مکان هر نقطه از لحاظ هندسی، زمان حادثه‌ٔ خاصی را هم که در آن به‌وقوع می‌پیوندد نسبت به یک مبدا زمانی ثابت و مشترک در نظر بگیریم. برای روشن شدن موضوع، فضایی سه بعدی را در نظر می‌گیریم که دو بعد آن مکان و بعد سوم آن زمان باشد. در شکل ۲ به سوی صفحه‌ٔ مربع شکلی که یک فضای دوبعدی به‌حساب می‌آید گلوله‌هایی پرتاب می‌شود. محل اصابت هر گلوله به وسیله‌ٔ مختصات x و y آن معلوم می‌شود و زمان اصابت را هم می‌توان براساس مدت زمان سپری شده از یک مبداء زمانی ثبت کرد.

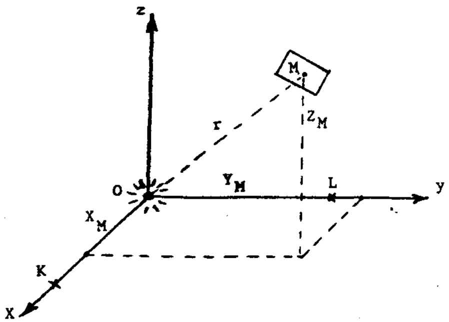


شکل۲. محل وقوع دو حادثه‌ٔ A و B

در این صورت اگر مبدا زمان مثلا ساعت ۷ اختیار شود ($\frac{۱}{۴}$ و ۲و۱) A یعنی اصابت گلوله به نقطه‌ٔ دارای مختصات (۲و۱) در ساعت $\frac{۱}{۴}$۷ و ($\frac{۱}{۲}$ و ۱ و ۳) B یعنی اصابت گلوله به نقطه‌ٔ دارای مختصات (۱و۳) در ساعت $\frac{۱}{۲}$۷. در اینجا مختصات صرفا مربوط به موقعیت هندسی نیستند بلکه به وقوع حادثه‌ای در زمان و مکان خاص مربوط‌اند. حادثه‌ای هم که در زمانی خاص در نقطه‌ای از فضای سه‌بعدی پیرامون ما رخ می‌دهد. متناظر با نقطه‌ای چهار بعدی است و مطابق آنچه تصور و دریافت ذهنی ما بر اساس آن شکل گرفته یا به آن عادت کرده، تاریخچه‌ٔ سراسر جهان، مجموعه‌ٔ بی‌پایانی از این نقطه‌های چهار بعدی است.

خوب، حالا به‌نظر می‌رسد که به مرز ناحیه‌ٔ ممنوعه رسیده‌ایم. مختصات پنج بعدی برای نمایش چه نقاطی به کار می‌رود؟ موجودات ۵ بعدی یا با ابعاد بیشتر چه نوع موجوداتی هستند؟ ریاضیدانها بی آنکه پروای پاسخ‌گویی به چنین سوالهایی را داشته باشند محاسبات گوناگونی راجع به موجودات و فضاهای n بعدی انجام می‌دهند که به ازای n=۱ و n=۲ و n=۳ **قابل تعبیر به خواص و روابط شکلهای هندسی** روی خط، در صفحه و **در فضای سه‌بعدی است**. دیدیم که با پذیرفتن **زمان به عنوان بعدچهارم** هم می‌توان **چارچوبی ساخت که بیان انتزاعی** حوادثی را که در **زمانهای مختلف** در فضای سه بعدی روی می‌دهد **ممکن می‌سازد**.

مسائل عملی **پیرامون ما درظرف مکان ۳بعدی** و یک بعد زمان حادث **می‌شوند** و ممکن است به نظر برسد همه‌ٔ **پدیده‌هایی که تابع زمان** نیستند (در مدل فرضی که **برایشان ساخته می‌شود**) باید با استفاده از سه بعد **قابل تبیین و بررسی باشند**. اما درواقع چنین نیست. **با ذکر مثالی** نشان می‌دهیم که چگونه در **همین فضای** سه‌بعدی مسائل عملی ۵بعدی **هم می‌تواند** مطرح شود.



شکل۳. میزان روشنایی به فاصله‌ٔ M تا O و راستای فضایی صفحه‌ٔ شامل O بستگی دارد.

در شکل ۳ یک منبع نورانی در مبداء مختصات قرار گرفته است. در **فضای سه‌بعدی** شدت نور در هر نقطه (بر اساس **قوانین** فیزیک نور) با عکس مجذور فاصله‌ٔ آن **تا منبع نور** که در اینجا مبداء مختصات است **بستگی دارد**. پس:

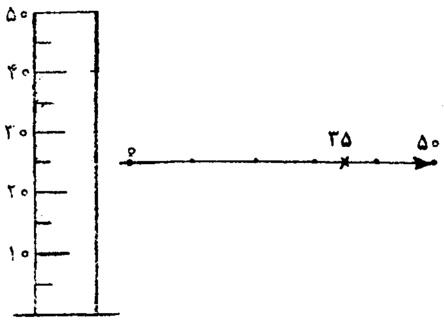
$$\text{شدت نور در نقطه‌ٔ } M = \frac{K}{r^2} = \frac{K}{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$$

به‌عبارت دیگر، شدت نور در هر نقطه به صورت تابعی از سه متغیر **x، y و z مربوط** به نقاط فضاست.

اکنون به‌جای شدت نور در نقطه‌ٔ M، میزان روشنایی درنقطه‌ٔ M روی **سطح مربعی** شامل نقطه‌ٔ M را در نظر می‌گیریم. بدیهی است اگر صفحه‌ٔ این مربع طوری قرار گیرد که پاره خط r بر آن

عمود باشد، بیشترین روشنایی را در نقطهٔ M خواهیم داشت. اگر صفحهٔ مربع در فضای سه بعدی بچرخد به‌طوری که محل M ثابت بماند، به علت تغییر زاویهٔ تابش نور بر سطح مربع، میزان روشنایی در M تغییر خواهد کرد. هر چه انحراف از حالت تابش عمودی در نقطهٔ M بر سطح بیشتر شود، نقطهٔ M کمتر روشن خواهد بود. وضعیت صفحهٔ گذرنده از M را با تعیین نقاط برخوردش با محورهای x و y می‌توان مشخص کرد (زیرا از سه نقطهٔ مفروض تنها یک صفحه می‌گذرد. با فرض $OL=L$ و $OK=K$ مختصات نقاط برخورد صفحه با محورهای x و y به‌ترتیب $(k, 0, 0)$ و $(0, l, 0)$ است. چون میزان روشنایی نقطهٔ M روی سطح مربع، هم به فاصلهٔ M از O و هم به امتداد فضایی صفحه بستگی دارد، می‌توانیم روشنایی نقطهٔ M را تابعی از پنج متغیر x_M، y_M، z_M، K و L به‌شمار آوریم. به این ترتیب مشاهده می‌شود که موقعیتهای مختلف ممکن برای نقطهٔ M واقع بر مربع در این مسئله (به علت مطرح شدن امتداد فضایی صفحهٔ مربع) یک فضای ۵ بعدی پدید می‌آورد. در حالت قبل تعبیر جبری مسئله یک تابع سه متغیره مربوط به فضای ۳بعدی بود. وقتی مسئلهٔ فیزیکی درقالب ریاضی بیان شد نتیجه‌گیری‌های ریاضی مقید به مصداق عملی رابطه‌های جبری نیست و از این لحاظ دست‌وبال ریاضیدان باز است. باید توجه داشت که پیشرفت و تکامل ریاضیات و پیدا شدن مفهومها و نظریه‌های تازه در آن گرچه اغلب از مسائل عینی و نیازهای عملی ناشی می‌شودولی در تعمیم مفهومهای موجود و ابداع نظریه‌های تازه و انتزاعی محدودیتی درکارریاضیدان‌وجود ندارد. گاهی مبحثی که یک ریاضیدان بدان پرداخته در زمان خودش تنها جنبهٔ انتزاعی داشته ولی بعدها کاربرد عملی یافته که جبر بولی مثال مناسب و معروفی در این مورد است.

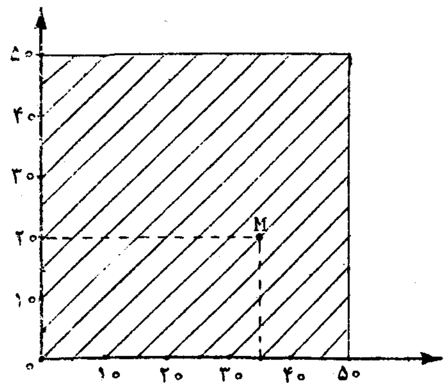
اکنون برای آنکه بتوانیم آزادانه‌تر راجع به موجودات n بعدی صحبت کنیم، ابعاد هندسی را رها می‌کنیم و مثال ملموس دیگری را مورد بحث قرار می‌دهیم: فرض کنید ظرفی مدرج داریم که در آن ۵۰ لیتر آب جا می‌گیرد. درجه‌بندی روی ظرف مقدار آب درون آن را نشان می‌دهد و بسته به اینکه چند لیتر آب در ظرف موجود باشد، عددی بین صفر و پنجاه می‌توان به آن نسبت داد. روی یک محور افقی هم می‌توان هر



شکل ۴. مثالی از فضای یک‌بعدی

حالت از ظرف را با یکی از نقاط پاره‌خط بین صفر و ۵۰ متناظر دانست (شکل ۴). اگر دو تا از این ظرف داشته باشیم که هر یک بتوانند مستقل از دیگری حاوی مقداری آب از صفر تا ۵۰ لیتر باشند کل حالات ممکن برای این دو ظرف از لحاظ مقدار آب موجود در آنها را می‌توان با نقاط واقع روی مربع هاشور خوردهٔ شکل ۵ نشان داد. مقدار آب در ظرف اول و دوم را می‌توان به‌ترتیب متناظر با طول و عرض نقطه دانست. مثلا نقطهٔ M در شکل ۵ متناظر است با وضعیتی که ظرف اول حاوی ۳۵ لیتر و ظرف دوم حاوی ۲۰ لیتر آب باشد.

اگر تعداد ظرفها به سه تا برسد حالات گوناگون مقادیر آب در ظرفها متناظر است با نقاط مختلف یک مکعب توپر که شکلی سه بعدی است. حال با آنکه برای ما که موجوداتی ۴بعدی هستیم

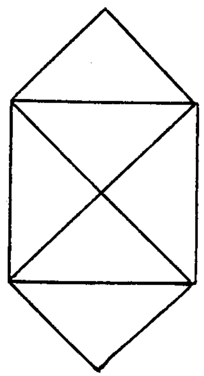


شکل ۵. مثالی از فضای دوبعدی

(با سه بعد مکان و یک بعد زمان) تجسم مکعبهایی با ابعاد بالاتر دشوار است ولی می‌توانیم با تعمیم مثال فوق مثلا بگوییم که نقاط تشکیل دهندهٔ یک مکعب ۱۱ بعدی متناظرند با همه حالات مختلفی که می‌توان برای مقادیر گوناگون آب موجود در ۱۱ ظرف در نظر گرفت. توجه کنید که در همهٔ این مثالها هر راس مکعب متناظر است با یکی از حالاتی که در آن هر ظرف یا به کلی خالی و یا به کلی پر است. تعداد این حالتها برای n ظرف 2^n است. بعدا دوباره به این موضوع شمارش برخواهیم گشت.

در مثال فوق کمیتهای مربوط به همهٔ بعدها از یک نوع بودند. اما همیشه چنین نیست. مثلا اگر در یک صفحهٔ مختصات دوبعدی، اندازهٔ سن افراد را روی محور x ها و طول قد آنها را روی محور y ها ببریم، به‌ازای هر فرد نقطه‌ای به‌دست می‌آید و هر یک از نقاط واقع در ناحیه‌ای از صفحه بیانگر سن و قد معینی هستند. حالا کارخانه‌ای را در نظر بگیرید که دارای یک شبکهٔ وسیع لوله‌کشی بخار است. معمولا درکارخانه‌ها باتوجه به فرایندی که انجام می‌گیرد اندازه‌گیری‌هایی در نقاط مختلف شبکه به عمل می‌آید و کمیتهای اندازه‌گیری شده (دما، فشار، سرعت، چگالی...) در یک اتاق کنترل به‌وسیلهٔ عقربه‌هایی روی صفحهٔ مدرج یا شمارنده‌های دیجیتالی نشان دهندهٔ آن کمیتها خوانده می‌شود. فرض کنید ۱۵ دماسنج، ۲۰ فشارسنج و ۱۰ دستگاه سرعت سنج، کمیتهای مربوط به بخار گذرنده از نقاط مختلف شبکهٔ لوله‌کشی بخار را که از لحاظ فرایند

شکل ۶. معمایی که به نظریهٔ گرافها مربوط می‌شود

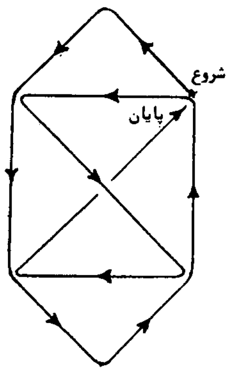


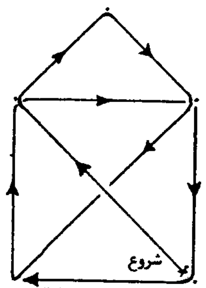
کارخانه مهم هستند اندازه‌گیری می‌کنند. در این صورت در هر لحظه ۴۵ کمیت مختلف در اتاق کنترل خوانده یا ثبت می‌شود. هر یک از این مجموعه مقادیر همزمان را می‌توان یک نقطهٔ ۴۵ بعدی دانست. فضای متشکل از این نقاط در علم کنترل **فضای حالات** خوانده می‌شود که هر نقطه از آن متناظر با مقادیر معینی برای یکایک کمیتهای مورد اندازه‌گیری است.

اکنون می‌خواهیم خاصیتی ازشکلهای هندسی راکه درقالب معماهای ساده‌ای مطرح می‌شود درمکعبهای n بعدی بررسی کنیم. بی‌شک شما هم تاکنون به معماهایی از این قبیل برخورده‌اید که چگونه می‌توان شکل ۶ را با یک خط شکستهٔ بسته رسم کرد بدون آنکه از هیچ پاره‌خطی دوبار عبور شود؟ در شکل ۷ راه حلی برای این معما نشان داده شده است. این کار برای همهٔ شکلها امکانپذیر نیست. مثلا اگر با حذف دو یال بالایی یا پایینی یکی از مثلثهای بالا یا پایین مربع حذف شود دیگر نمی‌توان شکل را به صورت خط شکستهٔ بسته‌ای بدون عبور مجدد از هیچ یالی رسم کرد. البته همان‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود در این حالت خاص اگر از شرط بسته بودن خط شکسته چشمپوشی کنیم ترسیم آن امکانپذیر است ولی نقاط شروع و پایان برهم منطبق نخواهد بود.

این ویژگی شکلهای هندسی در نظریهٔ گرافها بررسی می‌شود. در این نظریه قضیه‌ای وجود دارد که بر طبق آن: **برای آنکه بتوان شکلی را به‌صورت خط شکستهٔ بسته‌ای بدون تکرار هیچ یال رسم**

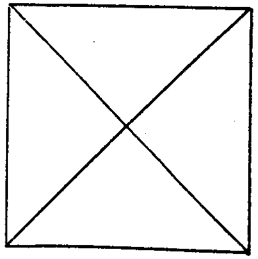
شکل ۷. راه حل معمای شکل ۶





شکل ۸. این شکل بسته نیست. نقاط شروع‌وپایان بر هم منطبق نیست

کرد باید تعداد یالهای منتهی به هر یک از راسها عدد زوجی باشد. اگر نخواهیم شرط بسته بودن مسیر یعنی منطبق بودن نقاط شروع و پایان را حفظ کنیم کافی است تعداد راسهایی که عدهٔ یالهای منتهی به آنها فرد است از ۲ بیشتر نباشد. در شکل ۷ تعداد یالهای منتهی به راسهای مختلف همواره عدد زوجی است (۲ یا ۴). در شکل ۸ تعداد یالهای منتهی به یک راس ۲ تا، تعداد یالهای منتهی به دو تا از راسها ۳ تا و تعداد یالهای منتهی به سه تا از راسها ۴تاست. در شکل ۹ تعداد یالهای منتهی به چهار راس ۳ تا و تعداد یالهای منتهی به یک راس ۴تاست. براساس قضیه‌ای که در بالا آورده شد هر کوششی برای ترسیم شکل ۹ به صورت خط شکسته بسته بدون تکرار هیچ یالی محکوم به شکست است (در این مثال بخصوص حتی با حذف شرط بسته بودن هم ترسیم ناممکن است).

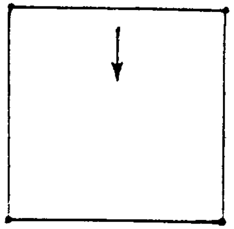


شکل ۹. این شکل را نمی‌توان با خط شکستهٔ بسته‌ای بدون عبور مجدد از هیچ یالی رسم کرد

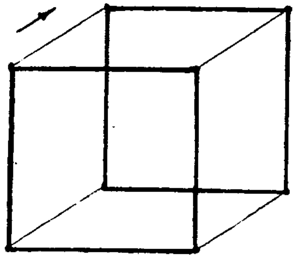
اکنون به سراغ مکعبهای n بعدی می‌رویم. پاره خط را می‌توان به تعبیری مکعب یک بعدی دانست. در پاره خط شکل ۱۰ دو راس وجود دارد که به هر کدام یک یال منتهی می‌شود و همان طور که تجربهٔ حسی ما حکم می‌کند و از قضیهٔ بیان شده هم برمی‌آید ترسیم این شکل با خط شکستهٔ بسته‌ای بدون تکرار یال ناممکن است.

اگر پاره خط را در جهت عمود بر خودش

شکل ۱۰. هر پاره خط به تعبیری مکعب یک‌بعدی است

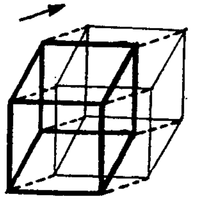


شکل ۱۱. حرکت پاره‌خط در صفحه به صورت خاصی مربع پدید می‌آورد



شکل ۱۲. حرکت مربع در راستای عمود بر صفحهٔ آن، مکعب پدید می‌آورد

و به اندازهٔ طول خودش در صفحه انتقال دهیم و راسهای متناظر را به هم وصل کنیم مربعی به‌دست می‌آید (شکل ۱۱) که در آن ۴ راس وجود دارد و به هر راس دو یال منتهی می‌شود. ترسیم پیوستهٔ مربع (یعنی ترسیم آن به صورتی که در قضیه بیان شده) امکانپذیر است. در این مورد هم حکم قضیهٔ مذکور با برداشت حسی ما همخوان است.

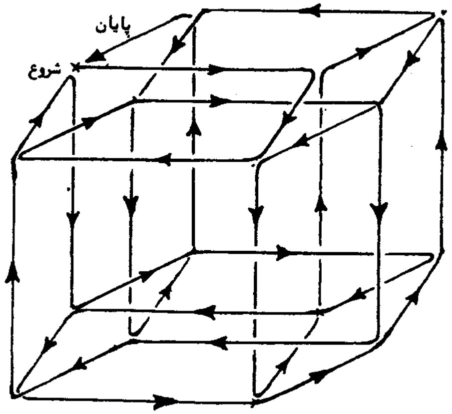


شکل ۱۳. تصویری از مکعب ۴بعدی

برای رسیدن به مکعبی که جسمی سه بعدی است، مربع را به اندازهٔ ضلع خودش و در امتداد عمود بر صفحهٔ آن انتقال می‌دهیم و راسهای متناظر را به هم وصل می‌کنیم. تصویری دوبعدی از آنچه حاصل می‌شود در شکل ۱۲ رسم شده است. چون صفحهٔ کاغذ خود دوبعدی است، بعد سوم را با خطهای مایل نشان داده‌ایم. در اینجا سه یال به هر راس منتهی می‌شود پس بلافاصله می‌توان گفت که ترسیم پیوسته شکلی که از مجموعهٔ یالهای مکعب تشکیل می‌شود امکان‌ناپذیر است.

باز هم به مرز قلمرو ممنوعه رسیده‌ایم. تصویر مکعب ۴بعدی روی صفحهٔ کاغذ قدری پیچیده درمی‌آید. برای ترسیم چنین شکلی می‌توانیم بعد چهارم را با امتداد مایلی غیر موازی با بعد سوم نشان دهیم. ابتدا تصویر دوبعدی یک مکعب را می‌کشیم. سپس آن را در امتداد بعد چهارم انتقال می‌دهیم. بعد راسهای متناظر

شکل ۱۴. نمایش راهی برای ترسیم پیوستهٔ مکعب ۴بعدی



را به هم وصل می‌کنیم (شکل ۱۳) (مکعب اولیه با خطوط کلفت، مکعب انتقال یافته با خطوط نازک و خطوط واصل راسهای متناظر با نقطه‌چین کشیده شده است). اگر همین کار را برای مکعب ۴بعدی تکرار کنیم، تصویری دوبعدی از مکعب ۵ بعدی به دست می‌آید. در مکعب ۴بعدی به هر راس ۴ یال منتهی می‌شود (شکل ۱۳) پس شکل متشکل از یالهای مکعب چهار بعدی را می‌توان به‌طور پیوسته رسم کرد. در شکل ۱۴ یک راه ممکن برای این کار نشان داده شده است.

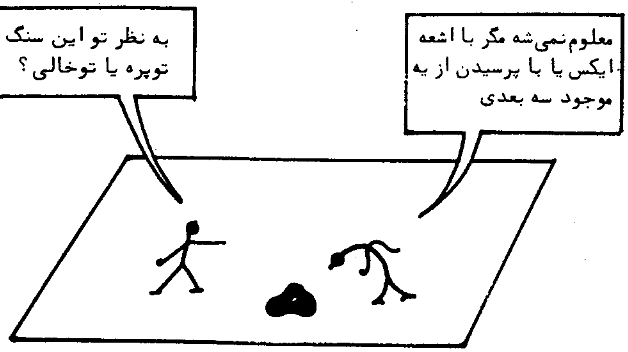
به طوری که در شکل ۱۴ دیده می‌شود یک نقطهٔ متحرک می‌تواند همهٔ یالهای مکعب ۴بعدی را به طور پیوسته بپیماید، یعنی بی‌آنکه از هیچ یالی دو بار بگذرد یا هیچ‌گاه از یالی خارج شود.

با تعمیم این روند می‌توان دریافت که انجام این کار در مکعب ۵ بعدی ناممکن است (همان طور که در مکعب معمولی ۳ بعدی و در پاره‌خط ناممکن بود).

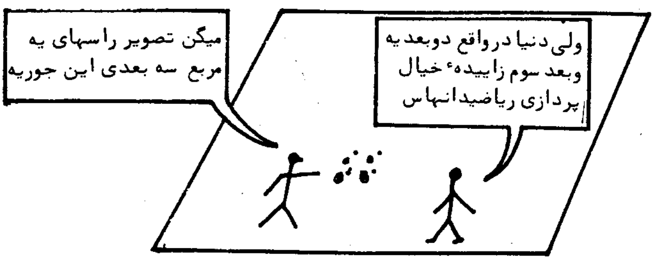
پس می‌گوییم ترسیم پیوستهٔ شکل پدیدآمده از یالهای مکعب n بعدی تنها در صورتی امکانپذیر است که n زوج باشد. به این ترتیب مثلا می‌توانیم راجع به تفاوت کیفی مکعب ۱۷ بعدی و مکعب ۱۸ بعدی (از لحاظ قابلیت ترسیم پیوسته) اظهار نظر کنیم. این توانایی قضاوت در مورد مکعبهایی که قادر به تجسم آنها نیستیم قابل مقایسه با امکانی است که نظریهٔ اعداد با اتکا بر شیوهٔ عددنویسی رایج، برای اظهارنظر در مورد اعداد فوق‌العاده بزرگ فراهم می‌کند. مثلا عدد ۱۰ به‌توان یک‌میلیون را در نظر بگیرید. این عدد آن‌قدر بزرگ است که نمی‌توانیم هیچ تصوری از میزان بزرگی آن داشته باشیم. با این حال فورا می‌توانیم با قطعیت بگوییم که این عدد بر ۲ بخش‌پذیر است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

این تصویرهای دوبعدی فایده‌های (نظری) دیگری هم دارند. مثلا بدون نیاز به تجسم مکعب ۴ بعدی می‌توانیم از تصویر ۲ بعدی آن به تعداد راسها و یالهای آن پی ببریم. شمارش این عناصر مکعب روی تصویر ۲بعدی براحتی مقدور است. محاسبهٔ ریاضی هم می‌تواند موید نتیجهٔ این شمارش باشد.

توجه کنید که در هر بار رفتن به بعد بالاتر (از پاره خط به مربع، از مربع به مکعب، الی آخر) تعداد راسها دو برابر می‌شود و مکعب یک بعدی (پاره خط) ۲راس دارد پس تعداد راسهای



ساکنان جهان دوبعدی (فرضی) که در ریاضیات تفننی‌به‌آن‌پلانیورس(مخففPlane Universe) می‌گویند، قادر به دیدن درون شکلهای مسطح نیستند



تجسم اجسام سه‌بعدی برای ساکنان پلانیورس (دنیای فرضی دوبعدی) کار چندان آسانی نیست

مکعب n بعدی 2^n است.

همچنین با توجه به نحوهٔ پدیدآمدن مکعب n بعدی از مکعب (n−1) بعدی نتیجه می‌شود که تعداد یالهای مکعب n بعدی برابر است با دو برابر تعداد یالهای مکعب (n−1) بعدی (یعنی مجموع تعداد یالهای دو مکعب اولیه و انتقال یافته) به اضافهٔ تعداد راسهای مکعب (n−1) بعدی (یعنی تعداد یالهایی که راسهای متناظر دو مکعب را به هم وصل می‌کنند). اگر تعداد یالهای مکعب n بعدی را با e_n نشان دهیم، نتیجهٔ فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$e_n = 2e_{n-1} + 2^{n-1}$$

با توجه به اینکه $e_1 = 1$ (برای پاره‌خط)، جملهٔ عمومی e_n را می‌توان مستقیما بر حسب n (مستقل از e_{n-1}) به‌دست آورد:

$$e_n = n\times 2^{n-1}$$

درستی این رابطه را می‌توانید دست‌کم در پاره خط، مربع، مکعب ۳بعدی و مکعب ۴بعدی (شکل ۱۳) امتحان کنید. □