

هندسة كوانتومي، كيت هانايس، دانشمند سال ۲۷، شماره ۴، شهریور ۱۳۶۸، ص ۹۶-۱۰۳.

هندسه کوانتومی

نوشته کیت هاناپس
ترجمه مهندس محمد باقری



اینشتین درباره هندسه ناقلیدسی گفته است: "من برای این تعبیر از هندسه اهمیت زیادی قائم زیرا اگر با آن آشنا نشده بودم هرگز موفق به ابداع نظریه نسبیت نمی شدم."

نباشد. برای سهولت فهم این نکته می توان اعداد را به عنوان عملهای ریاضی در نظر گرفت. * مثالهای ملموس زیادی وجود دارد که در آنها ترتیب عملها، روی نتیجه تاثیر تعیین کننده ای دارد. مثلا نتیجه پوشیدن کفش و سپس جوراب کاملا با نتیجه حاصل از پوشیدن جوراب و سپس کفش کاملا تفاوت دارد؛ بگذریم از اینکه یکی از این دو کار عجیب و غریب قلمداد می شود. ریاضیات جابجایی ناپذیر روشی عرضه می کند برای تعیین و توصیف مواردی که در آنها چگونگی ترتیب اعمال بر نتیجه مسئله مطرح شده کاملا تاثیر دارد. فیزیکدانها در تلاش خود برای دستیابی به یک نظریه فراگیر، این نوع ریاضیات را بسیار کارآمد یافته اند.

براستی در راه یکپارچه کردن نسبیت و نظریه کوانتومی چه دشواریهایی ظاهر می شود؟ در نظریه نسبیت خاص اینشتین، نحوه مقایسه اندازه گیریهای انجام شده به توسط ناظرهایی که

کشف نظریه های نسبیت و مکانیک کوانتومی در توصیف رفتار ماده و نیروها، تصور فیزیکدانها را از جهان بکلی دگرگون کرده است. پیشرفتهای حاصل از مفاهیمی که این نظریه ها مطرح کرده اند موجب دستاوردهای فنی چشمگیری نیز شده است. اما فیزیکدانها به رغم تلاش گسترده شان نتوانستند با ایجاد پیوندی بین نظریه کوانتومی و نسبیت به توصیف یگانه و منسجمی از طبیعت که بتوان آن را نظریه جامع و یکپارچه ای برای همه چیز دانست دست یابند. یکی از مشکلات متعدد این است که ساختار ریاضی این نظریه ها را چنان که باید و شاید درک نمی کنیم. اما اخیرا ریاضیدانها با ابداع هندسه جابجایی ناپذیر یا هندسه کوانتومی پیشرفتهای قابل توجهی در این جهت داشته اند. اکنون باید دید منظور از جابجایی ناپذیری چیست. اگر کمیت p را در یک کمیت دیگر x ضرب کنیم، حاصل ضرب آنها px ممکن است همان xp که حاصل ضرب x در p است،

* مثلا اگر عددی را سه برابر کنیم سپس به توان دو برسانیم حاصل کار با وقتی که همان عدد را ابتدا به توان دو برسانیم سپس سه برابر کنیم متفاوت درمی آید. م.

نسبت به هم با سرعت ثابتی حرکت می کنند بیان می شود. هرمان مینکوفسکی، آموزگار پیشین اینشتین برای نسبت قالب مناسبی عرضه کرد. وی نشان داد که با ترکیب سه بعد فضا و یک بعد زمان در یک هندسه واحد چهار بعدی، نظریه نسبیت را می توان براحتی نتیجه گرفت. در نظریه نسبیت عام که ده سال بعد عرضه شد این مفهوم برای توصیف حرکت نایکناخت و نظریه گرانش (جاذبه) به کار رفت. نقطه شروع نظریه فوق، این مشاهده گالیله بود که گرانش در همه اجسام شتاب یکسانی پدید می آورد که به جرم یا اجزای تشکیل دهنده جسم آنها بستگی ندارد. معنی دیگر این گفته آن است که در غیاب سایر نیروها، وضعیت اولیه و سرعت برای تعیین یک مسیر از لحاظ هندسی کافی است. اینشتین نشان داد که با انحنا دادن به هندسه فضا - زمان مینکوفسکی، مسیرهای پیچیده شده به وسیله اجسام دارای یک تعبیر هندسی طبیعی می شوند. (این مسیرها در واقع همان مسیرهای دارای کوتاهترین طول اند و مشابه دایره های عظیمه سطح دو بعدی زمین، در فضا - زمان چهار بعدی هستند.) اینشتین در تکمیل این نظریه، نشان داد که چگونه ماده با انحنا بخشیدن به هندسه فضا - زمان پیرامون خود، میدان گرانشی پدید می آورد.

با گذشت ده سال دیگر، ورنه هایزبرگ صورت نوین نظریه کوانتومی را ابداع کرد. نظریه کوانتومی بخوبی از عهده توصیف ذرات بنیادی ماده از قبیل الکترون برمی آید. مهمترین مشخصه این نظریه آن است که موقعیت هر ذره (x) ، و اندازه حرکت آن (p) که حاصل ضرب جرم و سرعت آن است (جابجایی ناپذیرند. به عبارت دیگر، p ضرب در x با x ضرب در p مساوی نیست. این مفهوم، اساس اصل ناپذیری (عدم قطعیت) هایزبرگ است که زیربنای کاربرد مکانیک موجی در نظریه کوانتومی است. تفاضل این دو کمیت یعنی $px - xp$ مقدار ثابت k است. ریاضیدانها با دستگاههای جابجایی ناپذیر آشنا بودند ولی برای فیزیکدانها این دستگاهها تا زگی داشت (پیوست را ببینید). ثابت k برای همه اجسام یکسان است و به رغم کوچک بودن (حدود 10^{-34} ژول ثانیه) صفر نیست. این امر نشان دهنده آن است که p و x نمی توانند اعداد معمولی باشند زیرا اعداد معمولی جابجایی ناپذیرند، چنان که

نوعی از هندسه، یعنی هندسه جابجایی ناپذیر، ممکن است برای یکپارچه کردن نسبیت و مکانیک کوانتومی در چارچوب یک نظریه فراگیر، قالب ریاضی مناسبی در اختیار فیزیکدانان قرار دهد

a ضرب در b برابر است با b ضرب در a و در نتیجه ab منهای ba برابر با صفر است.

به این ترتیب می توان صورت ساده تری برای اصل ناپذینی هایزبرگ به دست آورد. برای این منظور باید توجه کرد که اندازه گیری دقیق هر دو کمیت p و x امکان پذیر نیست؛ در غیر این صورت می توانستیم به جای این کمیتها مقدار اندازه گیری شده آنها را که جابجایی پذیرند بگذاریم. در این صورت با این تناقض روبه رو می شویم که ثابت k مساوی با صفر درمی آید. در سال ۱۹۳۰ دو ریاضیدان به نامهای مارشال استون (از دانشگاه شیکاگو) و جان فون نویمان در موسسه مطالعات پیشرفته (در پرینستون) نشان دادند که شرط جابجایی ناپذیری یعنی اینکه $k = px - xp \neq 0$ ، پتانسی برای مشخص کردن کل ساختار ریاضی نظریه کوانتومی کافی است. بعدها در دهه ۱۹۵۰ جورج مکی (از دانشگاه هاروارد) و آرتور وایتمن (از دانشگاه پرینستون) ثابت کردند که خود این معادله، به رغم ظاهر غریبش، تنها بیانگر آن است که توصیف فیزیکی نباید وابسته به نقطه ای باشد که موقعیت x از آن سنجیده می شود.

خوشبختانه با وجود مشکلات فنی فراوان، فیزیکدانها نظریه کوانتومی و نظریه نسبیت خاص را با موفقیت چشمگیری ترکیب کردند. پل دیراک نظریه مربوط به الکترون را در سال ۱۹۲۷ عرضه کرد که در آن اسپین الکترونها مطرح شده بود و وجود ضد ماده را که ۵۰ سال بعد تایید شد، پیش بینی می کرد.

تلاش برای یکپارچه کردن مکانیک کوانتومی و نظریه نسبیت عام به منظور ایجاد یک نظریه گرانش کوانتومی ظاهرا با موانعی روبه روست که برداشت ما را از خود این نظریه ها مورد سؤال قرار می دهد. منشأ این مشکلات آن است که

نسبیت عام از لحاظ ریاضی نظریه‌ای است بسیار پیچیده‌تر از هر نظریه دیگری که فیزیکدانها برایش یک مشابه کوانتومی یافته‌اند. در این مورد می‌توان نظریه الکترومغناطیس را مثال زد. شاید در اینجا هندسه جابجایی ناپذیر مشکل گشا باشد. این هندسه خود نظریه‌ای فیزیکی نیست، ولی شاید زبانی برای بیان نظریه‌هایی چون نظریه نسبیت کوانتومی عرضه کند. علاوه بر این، در حکم راهنمایی برای پی بردن به صورت احتمالی چنین نظریه‌ای است. این نوع هندسه را می‌توان با هندسه فضای خمیده مقایسه کرد که در دهه ۱۹۵۰ به وسیله ریاضیدانی از گوتینگن به نام برنارد ریمان ابداع شد. گرچه ریمان خود امیدوار بود که اندیشه‌اش در فیزیک کارآمد باشد - او تصور می‌کرد که پدیده الکترومغناطیس احتمالا ناشی از خمیدگی حوزه‌های کوچکی از فضا است - تنها وقتی که اینشتین مفهوم انحنای فضا را برای بیان نظرات فیزیکی جدید به کار گرفت، نظریه نسبیت عام پا به عرصه وجود گذاشت. با این حال هندسه ریمان نقش مهمی در پیدایش این نظریه داشته است، زیرا ابزار ریاضی او شیوه سراسری برای بیان قوانین فیزیکی مشخص می‌کرد که اینشتین را در دستیابی به معادله‌های مناسب یاری داد. در نظریه اینشتین، میدانهای گرانشی صرفا با مکان و زمان تغییر نمی‌کنند، بلکه خود، هندسه فضا و زمانی را که در آن واقع اند مشخص می‌کنند. به نظر می‌رسد که احتمالا هر کوششی برای درآمیختن گرانش و نظریه کوانتومی مستلزم پیدایش نوعی جابجایی ناپذیری است. از آنجا که گرانش خود تعیین کننده هندسه فضا - زمان است، این هندسه هم باید جابجایی ناپذیر باشد. در هر صورت، دلایل محکمی وجود دارد که بپذیریم هندسه فضا و زمان در مسافتهای فوق العاده کوچک باید کاملاً با آنچه در جهان معمولی انتظارش را داریم متفاوت باشد. برای تمایز بین نقاطی که خیلی به یکدیگر نزدیک اند باید از پرتوهایی با طول موج نسبتاً کوتاه استفاده کنیم. اصل ناپیوستگی می‌گوید که اگر موقعیت ذرات یا کوانتومهای تابش را دقیقاً بدانیم، اندازه حرکت و در نتیجه انرژی آنها باید خیلی زیاد باشد. ولی بنا به فرمول معروف اینشتین ($E = mc^2$) مقدار انرژی معادل است با جرم m که به نوبه خود میدان گرانشی تولید می‌کند که به فضا و زمان انحنا

می‌دهد. پرتوی با طول موج حدود 10^{-35} متر حامل چنان انرژی زیادی است که فضا - زمان پیرامون آن باید در هم بشکند و سیاهچاله‌ای پدید آورد. همین موضوع برخی از فیزیکدانها را به این نتیجه رسانده که در مقیاس کوچک، هندسه فضا - زمان متخلخل و انباشته از سوراخ است. معمولاً فیزیکدانها این وضعیت را به دریا تشبیه می‌کنند که از فاصله هزاران کیلومتری بالای سطحش، جامد به نظر می‌رسد ولی از فاصله چند صد متری، امواج آن دیده می‌شود و در سطح دریا می‌توان کفهایی با هزاران حباب مشاهده کرد.

شاید بپرسید چه لزومی دارد که بخواهیم حتماً نسبیت عام و نظریه کوانتومی را یکپارچه کنیم. از اینجا گذشته، 10^{-35} متر فاصله خیلی کمی است. این فاصله خیلی کمتر از هر فاصله‌ای است که امروزه قادر به اندازه گیری هستیم (حدود 10^{-14} متر در برخی شتابدهنده‌های ذرات).

اما در برخی شرایط، تاثیر دوجانبه بین گرانش و نظریه کوانتومی پراهمیت از آب درآمد. مثلاً در ستاره‌های نوترونی، نیروی دفعه بین نوترونهای تشکیل دهنده ستاره و جاذبه گرانشی بین آنها یکدیگر را خنثی می‌کنند. ستاره‌های نوترونی از نوترون و الکترونهای آزاد تشکیل شده‌اند. چگالی ستاره نوترونی چنان زیاد است که بخش درونی آن همچون هسته‌ای غول‌آسا عمل می‌کند. ذرات بنیادی درون ستاره نوترونی از اصل طرد فرمی پیروی می‌کنند که براساس آن هیچ دو ذره بنیادی نمی‌توانند لایه یا مدار انرژی یکسانی را اشغال کنند. در مورد اجسامی که جرم آنها تنها اندکی بیش از جرم ستاره نوترونی باشد تاثیر متقابل بین نسبیت عام و نظریه کوانتومی می‌تواند تعیین کننده باشد. پیش از آنکه بخواهیم امکانپذیری یک هندسه فضا - زمان را که جابجایی ناپذیر باشد چه در مقیاس 10^{-35} متر و چه در مقیاس 10^{30} متر بررسی کنیم، باید این را فهمیده باشیم که هندسه معمولی به چه معنی جابجایی پذیر است.

یکی از درخشانترین و پربارترین دستاوردهای تاریخ ریاضیات، کشفی بود که در دهه ۱۶۳۰ به وسیله پی‌یر دو فرما و رنه دکارت درباره وجود پیوندی ژرف بین هندسه و جبر صورت گرفت. این کشف باعث شد که ریاضیدانان بتوانند نتایج

پیوست ۱: جابجایی ناپذیری رعایت ترتیب را الزامی می‌کند

کوانتومی لیزرها پیش می‌آید. برای کسانی که با ماتریس آشنا هستند مثالی می‌آوریم که جنبه ریاضی بیشتری دارد:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در اینجا ترتیب اعمال روی نتیجه کار اثر می‌گذارد. شیوه‌های پیشرفته ترسیم کامپیوتری مبتنی بر جابجایی ناپذیری هستند، زیرا برنامه‌نویسان تصاویر سه‌بعدی از اجسام چرخنده را با استفاده از ماتریس پدید می‌آورند.



برنامه‌نویسان بدون استفاده از ماتریسها که جابجایی ناپذیرند نمی‌توانستند شکلهای ترسیم شده از اجسام سه‌بعدی چرخنده پدید آورند.

برای سهولت درک مفهوم جابجایی ناپذیری بهتر است p و x را به جای عدد، به منزله دو عمل در نظر بگیرید. مثلاً اگر اول قاشق را به دهان کودک ببرید بعد آن را پر کنید، نتیجه کار متفاوت - و بر سر و صداتراز - حالتی است که ابتدا قاشق را پر کنید و سپس آن را در دهان کودک بگذارید.

مثال دیگری که قدری به مورد مکانیک کوانتومی نزدیکتر است دلال هنری است که تابلوهایی را که مستقیماً از هنرمندان خریده به فروش می‌رساند. اگر این دلال یک تابلو بفروشد موجودی انبارش برابر است با "موجودی اولیه منهای یک تابلو". حال اگر یک تابلو بفروشد نتیجه کار عبارت است از "موجودی اولیه منهای یک - بعلاوه یک تابلوی تازه". از طرف دیگر فرض کنید که این دلال هنری ابتدا یک تابلو می‌خرد. حال اگر یک تابلو بفروشد می‌تواند این تابلو را از موجودی اولیه‌اش بفروشد به طوری که در پایان، کل موجودیش تغییری نکند. ولی این بار، این حق انتخاب را هم دارد که تابلوی تازه خریداری شده را بفروشد و موجودی اولیه‌اش به همان صورت باقی بماند. از لحاظ موجودی تابلوها، تفاوت بین "خریدن سپس فروختن" و "فروختن سپس خریدن" عبارت می‌شود از "به‌همان صورت ماندن". می‌توانیم بنویسیم:

(به همان صورت ماندن) = (فروختن و سپس خریدن) - (خریدن و سپس فروختن)
اگر "خریدن" را به p و "فروختن" را به x و به همان صورت ماندن "را به K نشان دهیم، به معادله‌ای نظیر معادله مکانیک کوانتومی هاینبرگ می‌رسیم. کافی است به جای فروش یا خرید تابلو جذب یا تابش فوتون را در نظر بگیریم تا به مثالی برسیم که در نظریه

ابداع کنندگان مکانیک کوانتومی بخوبی آگاه بوده‌اند که نظریه پیشنهادی‌شان چه ابزار جالب توجهی فراهم می‌آورد، ولی احتمالاً نخستین کسی که معنای کامل آن را بروشنی دریافت جان فون نویمان بود. وی با نشان دادن اینکه ویژگی جبری جابجایی ناپذیری وجه مشخصه نظریه کوانتومی است. در اواسط دهه ۱۹۳۰ پژوهش منظم انوعی از جبر را که کارآیی بیشتری در فیزیک از خود نشان می‌دادند آغاز کرد. این جبرها امروزه جبرهای فون نویمان نام گرفته‌اند. در عین حال، وی پی برد که بخش اعظم ریاضیات به خاطر فیزیک پدید آمده یا در فیزیک کاربرد وسیعی داشته است. به نظر او چنین انقلابی منحصر به فیزیک نمی‌شد و می‌توانست به شاخه‌های دیگری از ریاضیات تعمیم یابد، مثلاً منطق، احتمالات و تحلیل تابعهای ریاضی که هنوز به دست ریاضیدانان از قبود جابجایی پذیری رها نشده بودند.

فون نویمان تعداد این‌امکان را پذیرفت که جبرهای او جابجایی پذیر یا جابجایی ناپذیر باشند. وی هیچ فرض خاصی مطرح نکرد راجع به اینکه $ab - ba = 0$ چنان‌که در اعداد معمولی داریم یا اینکه $px - xp = k$ که در نظریه کوانتومی مطرح می‌شود؛ بنابراین جبرهای وی، هم فیزیک کلاسیک و هم فیزیک کوانتومی را در بر می‌گرفتند. در سال ۱۹۴۳ ایزرایل گلفاند و مارک نایمارک ریاضیدانانی از دانشگاه دولتی مسکو سرگرم بررسی جبرهایی بودند که گستره آنها اندکی وسیعتر از جبرهای فون نویمان بود. آنها قضیه زیبایی ثابت کردند که موید روش فون نویمان بود. اثبات این امر دشوار نبود که فضای هندسی معمولی به علت آنکه در هندسه معمولی ترتیب ضرب اهمیتی ندارد به جبر جابجایی پذیر منجر می‌شود. گلفاند و نایمارک با بهره‌گیری از روشهایی که گلفاند پیش از آن بود نشان دادند که هر جبر جابجایی پذیر به یک فضای هندسی جابجایی پذیر وابسته است. آنها معلوم کردند که چگونه می‌توان از روی جبر نه تنها هندسه فضا بلکه خود فضا را به دست آورد. این کار به منزله گامهایی بسیار فراتر از کار فرما و دکارت بود. آنها با صفحات دو بعدی یا فضاهای سه بعدی سروکار داشتند ولی از جبر تنها برای بررسی هندسه درونی منحنی‌ها و سطوح سود می‌جستند.



دکارت: من بهترین جنبه‌های تحلیل هندسی و جبر را اختیار می‌کنم و کمبودهای هر یک را با دیگری برطرف می‌کنم.

با این حال، ریاضیدانها به اتکای کار آنان می‌توانستند از نو مسائل هندسه را به زبان جبر و مسائل جبر را در قالب هندسه تعبیر کنند. حتی می‌توان هندسه معمولی را حالت خاصی از جبر جابجایی پذیر دانست. بعلاوه، با کنار گذاشتن فرض جابجایی پذیری به هندسه جابجایی ناپذیر می‌رسیم.

متأسفانه، هندسهای که در این نظریه ظاهر شد، از نوع نسبتاً ساده‌ای بود و فاصله‌اش تا هندسه مورد نیاز برای مسائل دقیق مربوط به انحناء در نسبیت عام و سایر نظریه‌های فیزیکی مطرح می‌شد زیاد بود. گرچه ایروینگ سگال، ریاضیدان آمریکایی در انستیتوی تکنولوژی ماساچوست گامهای مهمی در این جهت برداشت، تنها در چند ساله اخیر بود که نظریه‌ای با کارآیی رضایتبخش در نظریه‌های فیزیکی نوین ابداع شد. جالب اینکه منشأ پیدایش آن نه در فیزیک بلکه در ریاضیات پدیدار شد.

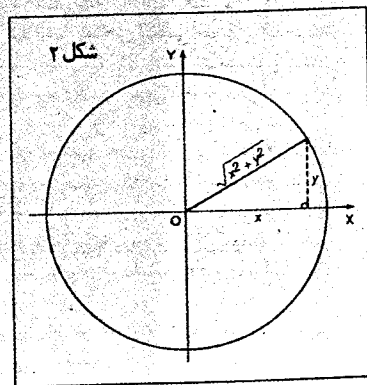
در سال ۱۹۶۳ مایکل ایته از دانشگاه آکسفورد

و ایرادور سینگر از انستیتوی تکنولوژی ماساچوست پاسخ سؤالی را یافتند که گلفاند در زمینه ظاهره متفاوتی از ریاضیات مطرح کرده بود. این مسئله به تعداد جوابهای نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل مربوط می‌شد. ایته و سینگر فرمولی هندسی به عنوان جواب عرضه کردند. در اینجا

هم بار دیگر مسئله‌ای بظاهر جبری به هندسه ارتباط یافته بود. بعلاوه، هندسه دیفرانسیل به کار رفته دقیقاً از همان نوع مورد نیاز برای فیزیک بود. نتیجه به دست آمده که قضیه اندیس نام گرفت بلافاصله از سوی ریاضیدانان به عنوان پیشرفت چشمگیر قلمداد شد. با

پیوست ۲: دکارت، فرمانروای قلمرو هندسه تحلیلی

در صفحه‌است. در مورد $x^2 + y^2 = 1$ بنابه قضیه قیثاغورس، در مورد فاصله op داریم $\overline{op}^2 = x^2 + y^2 = 1$ پس منحنی شامل نقاط p ای است با این خاصیت که فاصله‌شان از نقطه صفر (مبدأ) یک است، یعنی دایره‌ای به شعاع واحد (شکل ۲ را ببینید). مشابه این روش را می‌توان در سه بعد به کار گرفت. در اینجا برای بیان فاصله تا سه صفحه مختصات به سه مختصات x, y, z نیاز داریم. در مورد مگسی که الهام بخش دکارت شد، سقف و دو دیوار در حکم این صفحات بودند و مگس همان نقطه p بود. با تعمیم آنچه در مورد دایره گفته شد کره‌ای به شعاع a را می‌توان به وسیله معادله $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ بیان کرد.

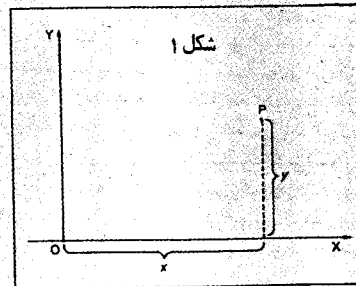


شکل ۲

در سالهای ۱۶۳۷ و ۱۶۳۸ دو ریاضیدان فرانسوی به نام پی‌یر دو فرما و رنه دکارت توصیفی جبری از هندسه عرضه کردند (که مستقل از یکدیگر به کشف آن نایل شده بودند). گرچه ماهیت اصلی این دو کشف یکی بوده، امروزه آنچه شناخته شده و دنبال می‌شود هندسه دکارتی (کارتزین) یا هندسه تحلیلی دکارت است.

برای توصیف هندسه در یک صفحه، محورهای مختصات ox و oy را عمود برهم انتخاب می‌کنیم و سپس موقعیت هر نقطه p را با تعیین فاصله‌های x و y آن از دو محور مشخص می‌کنیم (شکل ۱ را ببینید). در این صورت، معادله‌ای که x و y را به هم مربوط کند، مثل $x^2 + y^2 = 1$ ، بیانگر یک منحنی

دکارت و فرما با انتشار نظریه‌هایشان در قرن هفدهم پیوندی میان هندسه و جبر پدید آوردند.



شکل ۱



جان فون نویمان بر آن است که جابجایی ناپذیری وجه مشخصه نظریه کوانتومی است.



مایکل ایتهای برای مسائل جبری راه حل هندسی یافته است.

شاخته شدن هر چه بیشتر این قضیه، توجه دانشمندان فیزیک نظری به آن نیز افزایش یافت. این قضیه ابزاری ایده‌آل برای بررسی برخی از مهم‌ترین خواص نظریه کوانتومی میدانها از قبیل شمارش تعداد جوابهای ممکن برای مسائل عرضه می‌گردد.

گاه تعبیر کننده بعدی در اواسط دهه ۱۹۷۰ بر داشتند شد که طی آن یک ریاضیدان فرانسوی به نام آلن کن از مرکز ملی پژوهشهای علمی در پاریس که قبلاً به خاطر آتارش درباره جبرهای فون نویمان شهرت یافته بود، تصمیم فووالعاده طریقی برای قضیه اندیس پیدا کرد. در این نظریه، عناصر اساسی هندسه به جای نقاط، انبساطی با ابعاد بالاتر مثلاً منحنیها هستند. مثلاً کره را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از خطوط مدارهای عرض جغرافیایی در نظر گرفت. وی در کنار خود نظریه فراگیری ابداع کرد که ریاضیدانان به کمک آن توانستند بخشهای عظیمی از هندسه را به جابجایی ناپذیری بریند. ریاضیدانها با بهره‌گیری از کارهای گلفاند و نایمارک با نحوه پرداختن به وجه اساسی هندسه جابجایی ناپذیر آشنا هستند. آنها اکنون می‌توانند با هندسه دیفرانسیلی نظیر آنچه ریمان و اینشتین به کار می‌گرفتند بسودن بدیروتن فرض جابجایی پذیری کار کنند. نظریه

دیگری که اخیراً توجه فراوانی به خود جلب کرده می‌گوید که هندسه فضا - زمان از نقاط تشکیل نشده بلکه متشکل از حلقه‌های یارسمانهای کوچکی به پهنای حدود 10^{-35} متر است که فیزیکدانها آن را ابررسمان نامیده‌اند. مثلاً همین اواخر ادوین در دانشگاه پرینستون نظریه‌های مبتنی بر ابررسمان را بد زبان هندسه جابجایی ناپذیر بیان کرده است.

هندسه جابجایی ناپذیر، به رغم تاریخچه طولانی بسیار سنت شکسته‌تر از خیلی نظریه‌های جدیدتر فیزیک است. گرچه نظریه‌های فراگیر این امکان را می‌پذیرند که فضا - زمان دارای ابعادی بیش از آنچه ما عموماً درک می‌کنیم و درجه تفاوتی بالاتر از آنچه قبلاً دریافته‌ایم باشد، علم فیزیک همچنان در غرضای از فضا و زمان پیش می‌رود که با آنچه بدان خو گرفته‌ایم تنها در جزئیات تفاوت دارد. اما میدانهای فیزیکی همچون الکترومغناطیس و گرانش نه تنها در زمان جاری‌اند بلکه ابزاری برای اکتشاف فضا نیز در اختیار ما قرار می‌دهند. سرانجام می‌توان انتظار داشت که فیزیک، تعیین کننده هندسه فضا و زمان باشد و نه طور دیگر، یعنی اینکه جبر میدانها شکل هندسه را تعیین کند. جوهر هندسه جابجایی ناپذیر هم همین است.

پیوست ۳: جابجایی ناپذیری در مسیر دایره شکل الکترون

نیروی الکترومغناطیسی Bev مساوی می‌گیریم. با این کار نتیجه می‌شود $y = \frac{mv}{Be}$. اما مقدار $p=mv$ اندازه حرکت الکترون است. طبق نظریه ورنه‌هایزبرگ بین p و موقعیت الکترون روی خط حرکت (x) رابطه $px-xp=k$ برقرار است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\frac{px-xp}{Be} = \frac{k}{Be}$. پس طبق نظریه کوانتومی، دایره‌ای با مختصات جابجایی ناپذیر بیانگر مدار خواهد بود. در عمل، الکترونهايي که میدان مغناطیسی به آنها اعمال می‌شود عموماً درون مواد بلوری (کریستالی) مثل فلزات هستند. در این حالت تحلیل دقیق نشان می‌دهد که ساختار بلور تنها شفاعهای خاصی را امکانپذیر می‌کند و این شاعها به نحو بسیار پیچیده‌ای با میدان مغناطیسی مربوط‌اند. ژان بلیسار از مرکز فیزیک نظری ماری، جورج الیوت از دانشگاه تورونتو، و دیگران اخیراً روشهای هندسه جابجایی ناپذیر را در تلاشهای خود برای دریافتن این رابطه پیچیده به کار گرفته‌اند. این مثال بخصوص از این لحاظ مهم است که با اثر هال ارتباط نزدیک دارد.

کلاوس فون کلیتسینگ در سال ۱۹۸۵ با کشف اثر کوانتومی هال برنده جایزه نوبل شد. وی گاز دو بعدی الکترونهاي محبوس در یک بلور را مورد مطالعه قرار داد. وقتی جریانی از یک رسانا در حضور میدانی مغناطیسی که با رسانا زاویه‌های قائمه می‌سازد بگذرد ولتاژی به نام ولتاژ هال روی ماده و عمود بر راستای میدان و جریان ظاهر می‌شود. مقاومت را طبق قانون اهم می‌توان با تقسیم ولتاژ بر جریان به دست آورد. کلیتسینگ کشف کرد که مقاومت هال تابع ساده‌ای از ثابتهای بنیادی و در نتیجه پدیده‌ای کوانتومی است. این کشف می‌تواند در تعریف مقاومت به کار آید.

لو لاندائو، فیزیکدان اهل شوروی، در سال ۱۹۳۰ یکی از نخستین مثالهای هندسه جابجایی ناپذیر فضا را یافته است. وی مشغول بررسی حرکت الکترون در میدان مغناطیسی بود. برای سادگی فرض می‌شود که الکترون در صفحه‌ای عمود بر میدان حرکت می‌کند (شکل ۳ را ببینید). بار متحرک الکترون (e) موجب ایجاد جریان ev می‌شود که در آن v سرعت الکترون است. طبق قانون فاراده، در حضور میدان مغناطیسی (B)، این جریان باعث پیدایش نیرویی به‌اندازه Bev روی الکترون و عمود بر هر دو امتداد حرکت و میدان می‌شود. این نیرو سبب می‌شود مسیر الکترون انحنا یافته به صورت مدار دایره شکل درآید.

محاسبه فاصله (γ) بین الکترون و مرکز دایره بسیار آسان است. اگر m جرم الکترون باشد، نیروی جانب به مرکز $\frac{mv^2}{r}$ را که برای نگهداشتن الکترون در مدارش لازم است با

لو لاندائو کشف کرد که مسیر الکترونها در میدان مغناطیسی خمیده است.

