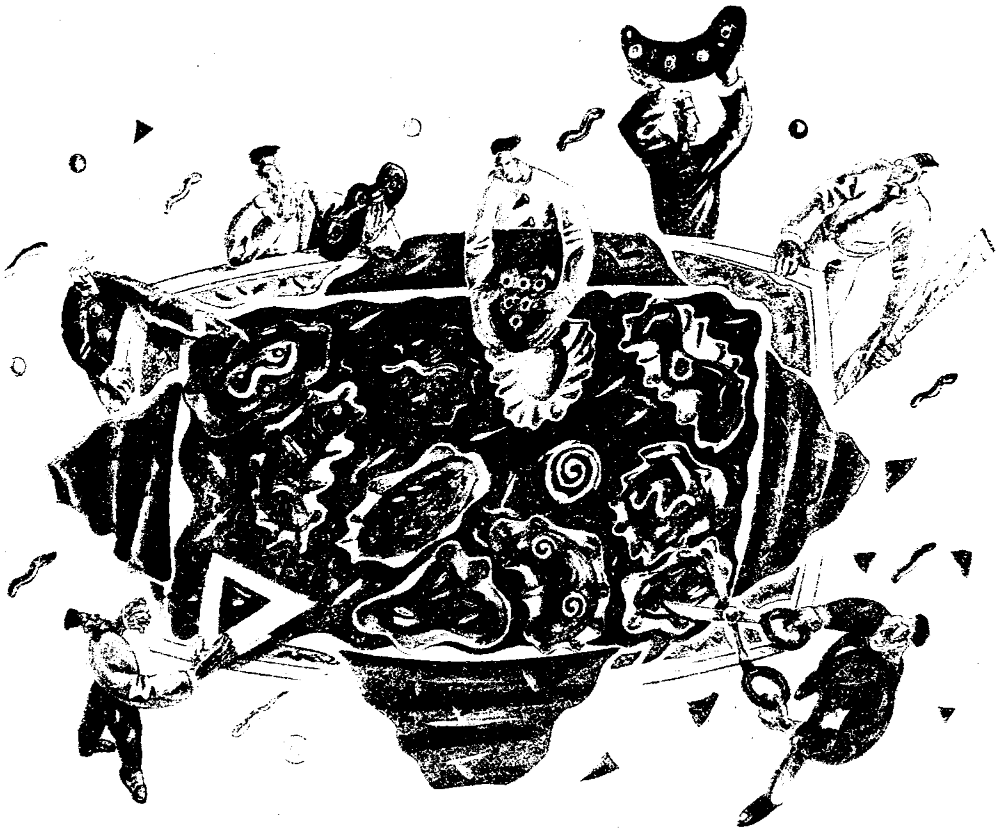
کاربرد هندسه در کفّاشی، ری کانینگام گرین، *دانشمند*، سال ۲۷، شمارهٔ ۱۲، اسفند ۱۳۶۸، ص ۷۵-۶۸.



# کاربرد هندسه در کفاشی و مسئلهٔ سینی شکلات

نوشتهٔ ری کانینگام گرین، استاد ریاضیات صنعتی در دانشگاه بیرمنگام (انگلستان).

ترجمهٔ مهندس محمد باقری

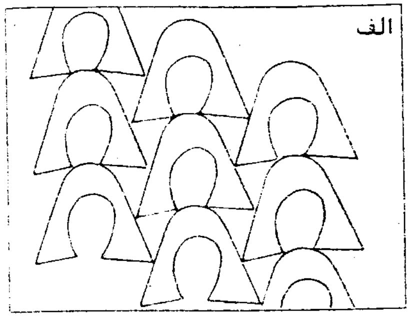
**درآوردن الگوی لباس از پارچه، چاپ کردن کاغذ دیواری، پر کردن جعبهٔ شکلات یا برنامه‌ریزی برای کار روبوتها، همه و همه مستلزم یک کار دشوار است: جابه‌جا کردن و کنار هم جور کردن شکلهای نامنظم با رعایت بیشترین صرفه‌جویی. ریاضیدانها درصدد تنظیم برنامه‌های کامپیوتری هستند که موجب افزایش سودبری تولیدکنندگان شود**

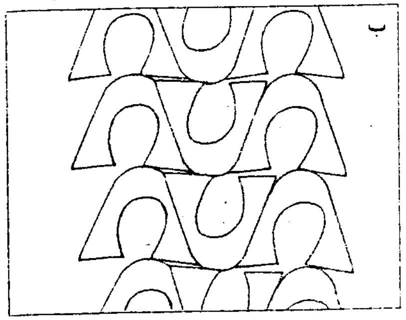
وقتی می‌خواستم به محل سکونت فعلی‌ام در بیرمنگام اسباب کشی کنم، سه کارگر همهٔ اثاث خانه‌ام را در وسیلهٔ نقلیه‌ای چیدند که ابعادش از حد مجاز برای عبور در جاده‌ها بیشتر نبود. در خانهٔ جدید، نجار مشغول بریدن تختهٔ نئوپان روکشدار برای ساختن قفسهٔ آشپزخانه بود و وقتی پیانو را آوردند مجبور بودند که آن را با دقت و مهارت از کنجها و درگاهها بگذرانند تا دیوارهای گچی زخمی نشود.

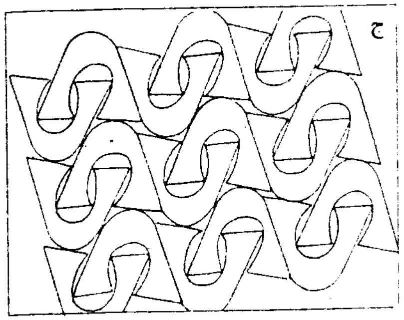
نصب قفسه، پرکردن اتاقک کامیون و جابجایی پیانو نمونه‌هایی از مسائل هندسی مربوط به طرحریزی نحوهٔ برش، بسته‌بندی و جابجایی است. این مسائل، به‌رغم ظاهر متفاوتشان ارتباط نزدیکی با هم دارند، زیرا همهٔ آنها با یافتن آرایشها یا حرکتهای اشکال درون یک فضای محصور سروکار دارند. این شکلها باید با یکدیگر برخورد نکنند و توی هم فرو نروند و ضمنا از مرزهای فضای محدود خود هم بیرون نزنند.

یافتن بهترین شیوهٔ کنار هم چیدن اشکال نه فقط به خاطر اسباب‌کشی بلکه همچنین به‌علت اهمیت اقتصادی آن در صنعت قابل بررسی است. مثلا، کفاشها سعی می‌کنند از یک ورقه پوست قطعات چرمی را طوری ببرند که بیشترین صرفه‌جویی را در مصرف چرم کرده باشند. در شکل ۱ شیوه‌های برش قسمتی از کفش را که نعلی شکل است و "رویه" خوانده می‌شود روی ورقه‌ای از چرم نشان می‌دهد. اگر بافت ورقه ایجاب کند که قطعات همه در یک جهت قرار گیرند، طرز بریدن قطعه‌ها باید مطابق شکل ۱ الف باشد. در این وضعیت حدود ۴۶ درصد از مواد اولیه دور ریخته می‌شود. اگر بافت ورقه اجازه بدهد که قطعات سروته کنار هم چیده شوند، آرایشی مانند آنچه در شکل ۱ ب دیده می‌شود مقدار دورریز را به ۳۳ درصد تقلیل خواهد داد. آرایش توی هم رفتهٔ شکل ۱ ج از این هم بهتر است و دورریز مواد در آن تنها ۲۰ درصد است. در بسیاری از رشته‌های گوناگون صنعتی مسائل برشی از این دست مطرح می‌شود که تولید پوشاک یا درآوردن در قوطی از یک ورق فلزی از آن جمله است.

صرفه‌جویی در بسته‌بندی در تجارت نیز فوق‌العاده مهم است. مثلا، شکلاتهایی با شکلهای مختلف باید به طور اقتصادی روی یک سینی کنار هم ردیف شوند یا سبدهایی با ابعاد گوناگون باید در انبار به شیوه‌ای منظم و پایدار روی هم چیده شوند. مسئلهٔ برنامه‌ریزی حرکتها در خطوط مونتاژ مدرن برای هدایت روبوتها نیز مطرح می‌شود تا هنگام کار روی قطعات با هم برخورد نکنند.




شکل ۱. چیدن شکلها در کنار هم با رعایت صرفه جویی در صنعت اهمیت دارد. در این شکلها سه آرایش ممکن برای برش رویه‌های کفش از چرم دیده می‌شود: آرایش الف تقارنی از نوع موسوم به w دارد، ب هم آرایشی از نوع w است، ج آرایشی توی هم رفته از نوع w دارد

این مسائل نسبتا پیچیده و دشوارند . اشیای مورد نظر شکلهای ویژه‌ای دارند ، فضایی که در آن حرکت می‌کنند فضای سه بعدی با مرزهـای پیچیده است و انواع حرکتهای ممکن را هم براحتی نمی‌توان دسته‌بندی کرد . با وجود این ، باتوجه به یک آرایش بسیار ساده می‌توان پی برد کـه هندسه تا چه حد می‌تواند در این‌گونه مسائـل راهگشا باشد . به این ترتیب می‌توان چند اصل کلی به دست آورد و با استفاده از کامپیوتر این اصلها را برای موارد پیچیده‌تر تعمیم داد . در شکل ۲ الف ، چهار ضلعی Q که روی صفحه ثابت شده است و مثلث T که می‌تواند روی صفحه آزادانه ولی بدون چرخش بلغزد ، دیده می‌شود . یک نقطه به نام P روی مثلث T به عنوان نقطهٔ مبنا مشخص شده است.که محل مثلث با تعیین محل نقطهٔ "نشانی " P مشخص می‌شود .

اکنون به عنوان یک مسئلهٔ برش ، فرض کنید صفحهٔ شکـل ، یک ورق از مـاده‌ای است کـه می‌خواهیم یک نمونه‌از چهار ضلعی Q و یک نمونه از مثلث T درجهتهایی که در شکل ۲ دیده می‌شود از آن ببریم . چطور می‌توانیم همهٔ موقعیتهای T را که در آنها T و Q داخل یکدیگر نمی‌شوند ، بیان کنیم ؟ یا فرض کنید می‌خواهیم مثلث T را از وضعیت $P_1$ به وضعیت $P_2$ بلغزانیم . طی ایـن کار مثلث می‌تواند با چهار ضلعی Q تماس پیدا کنـد ولی نباید به درون آن وارد شود . آیـا می‌توان حرکتهای مجاز T را به نحوی مشخـص کرد ؟

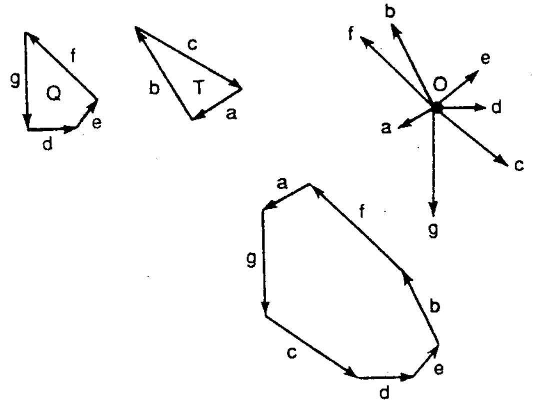
برای روشن شدن موضوع ، فرض کنید مثلث را بدون چرخش حرکت می‌دهیم تا به موضعـی منتقل شود که صرفا با چهار ضلعی Q تماس داشته باشد . اکنون T را حول چهار ضلعی Q می‌چرخانیم به‌طوری که همواره با Q تماس داشته باشد و هیچ‌گاه از مرزهای Q به درون تجاوز نکند . هنگامی کـه راسی از T روی ضلعی از Q می‌لغزد نقطهٔ نشانی بـه مـوازات آن ضلع حرکت می‌کند ؛ اما وقتـی ضلعی از T روی راسی از Q می‌لغزد ، نقطه نشانی به موازات آن ضلع از T حرکت می‌کند (شکل ۲ب را ببینید ). پس مسیر نقطهٔ "نشانی " متشکل است از پاره‌خطهایی نظیر چهار ضلع Q و سه‌ضلع

## چگونه ناحیه مانع مسئله را پیدا کنیم ؟

ضلعهای چهارضلعی Q و مثلث T را به صورت بردار درآورید به‌طوری که اگر روی مرز Q در جهت بردارها حرکت کنیم ناحیه درونی Q همواره در سمت چپمان قـرار گیرد ولی اگر مرز T را بپیماییم ناحیهٔ درونی T همواره در سمت راستمان واقع باشد .

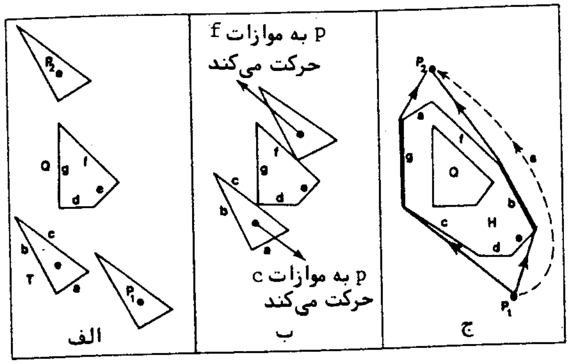
از یـک نقطهٔ دلخواه O هفت بـردار هـم‌ارز با این بردارها رسم کنید به طوری که مبداء همهٔ آنها O باشد . در این مثال ترتیب قرار گرفتن بـردارهـا در خلاف حـرکت عقربه‌های ساعت حول O به‌صورت debfagc خواهد بود . اکنون بردارها را به‌دنبال هم و بدون تغییر جهت در همان ترتیب debfagc به یکدیگر وصـل کنید . شکل حاصل ، ناحیـهٔ مانع T نسبت به Q است .

این روش برای هر دو چند ضلعی محدب دلخواه قابـل استفاده است . به این ترتیب درواقع شکل ناحیهٔ مانع به دست می‌آید و پس از کار تعیین موقعیت ناحیهٔ مانـع در صفحه براحتی امکان‌پذیر است .










**شکل ۲. طرز حرکت مثلث T را حول چهار ضلعی مسطح Q نشان می‌دهد. در قسمت الف، نقطهٔ نشانی P موقعیت مثلث T را مشخص می‌کند، در قسمت ب مثلث T حول چهار ضلعـی لغزانده می‌شود به طوری کـه نقطهٔ نشانی p هفت ضلعی H را که ناحیه مانع خوانده می‌شود و در قسمت ج رسم شده است ، می‌پیماید .**

T که در ترتیب خاصی به هم وصل شده‌اند و هفت ضلعی debfagc را که در شکل ۲ ج به نام H خوانده شده پدید می‌آورند .

براحتی می‌توان دریافت که اگر T را بـدون چرخش به جاهای مختلفی در صفحه انتقال دهیم ، هر وقت نقطهٔ نشانی داخل هفت ضلعی H قـرار گیرد مثلث T با Q ناحیهٔ مشترک پیدا می‌کند ؛ هر وقت نقطهٔ نشانی روی مرز H قرار گیرد T با Q تمـاس دارد و هر وقت نقطهٔ نشانی بیرون از H باشد T و Q نقطهٔ مشترکی ندارند . به این ترتیب با ترسیم H می‌توان موضعهای مجاز T را در مسئلهٔ برش نشان داد . اکنون می‌توانیم مسئله برنامه ریزی حرکت را به صورت دیگری بیان کنیم : مسیری بیابید که موضعهای ابتدایی و انتهایی $P_1$ و $P_2$ مربوط به نقطهٔ نشانی را به هم وصل کند و از داخل H نگذرد . در شکل ۲ ج پیداست که S یک مسیر ممکن است (مسیر خط چین ) همچنان که دو مسیر دیگر که از دو طرف H می‌گذرند (مسیرهای خط پیوسته ) نیز چنین‌اند .

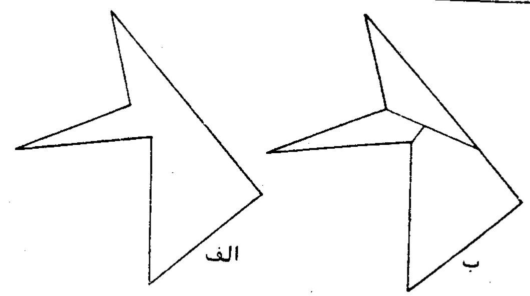
هفت ضلعی H را "ناحیهٔ مانع " ، برای مثلث T نسبت به چهارضلعی Q می‌نامند . براحتـی می‌توانیم عمل فیزیکی لغزاندن T حول Q را بـا معلوم بودن مشخصات T و Q به مجموعه‌ای از چند دستور برای یافتن ناحیهٔ مانع تعبیرکنیم (پیوست را ببینید) . این دستورها اختصاص به چهارضلعی و مثلث ندارند و برای هر دو چند ضلعی محدب قابل استفاده‌اند ، یعنی برای شکلهایی که اضلاع مستقیم دارند و راسهایشان به سمت خارج است (که به عنوان مثال شش ضلعی غیر محدبی کـه در شکل ۳ الف دیده می‌شود چنین نیست ) .

در مورد شکلهای انحنادار اوضاع از چه قرار است ؟ ناحیهٔ دایره مانندی که در شکل ۴ دیده می‌شود عملا یک ۲۰ ضلعی است ولی چون ایـن ۲۰ ضلعی قابل تقریب زدن با دایره است ، بسادگی معلوم می‌شود که دستورهای مربوط به یافتن ناحیهٔ مانع برای دایره یا سایر شکلهای محدبی کـه مرزهای منحنی هموار دارند نیز قابل تعمیم است، با این تفاوت که در اینجا پای حساب دیفرانسیل هم به میان کشیده می‌شود . اما در اغلب موارد کاربردی ، کافی است به‌جای شکل مورد نظـر ، یک چند ضلعی که تقریبا همانند آن باشد بگذاریم.

در شکل ۴ ، این مفاهیم در یک برنـامـهٔ کامپیوتری به نام فیتز (FITZ) نشان داده شده است . این برنامه مربوط به حالتی از مسئله سینی شکلات است که قبلا به آن اشاره کردیم . استفاده کنندهٔ برنامه مجموعه‌ای از شکلها را تعـریـف می‌کند و پهنای سینی را هم معین می‌کند . برنامه ابتدا ناحیهٔ مانع را برای هر جفت شکل بـه دست می‌آورد تا شکلها از مرز یکدیگر تجـاوز نکنند ، آنگاه شکلها را بدون چرخش یا ایجـاد ناحیهٔ مشترک روی سینی طوری می‌چینند که کمترین طول ممکن را اشغال کنند .

فرض کنید به جای این کار می‌خواهیم از یک حلقه نوار به پهنای معین قطعات شکل ۴ را در جهتهای داده شده بِبُریم به‌طوری که حتی‌المقدور در مصرف نوار صرفه‌جویی شده باشد . بدیـهی است که از شکل ۴ می‌توان به عنوان الگویی برای کار استفاده کرد . پس درواقع تفاوتی اساسی بین مسائل برش و مسائل بسته‌بندی وجود ندارد .

متاسفانه شکلهایی که در بسیاری از مسائـل کاربردی مطرح می‌شوند عموما محدب نیستند . گاهی این شکلها مثل آنچه در شکل ۳ الف می‌بینید



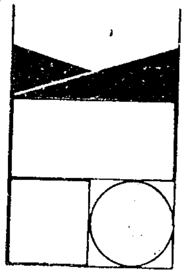

**شکل ۳. شش ضلعی غیرمحدب الف را نشان می‌دهد که دو راس روبه‌درون دارد. برای یافتن ناحیهٔ مانع، شش ضلعی شکل ب را به سه جزء محدب تفکیک می‌کنیم**

راسهایی به سمت داخل دارند. یک راه رهایی از این مشکل محصور کردن هر شکل غیرمحدب در شکل بزرگتری است که محدب باشد. اما در این کار باید کاملا مراقب بود. زیرا اگر شکل محدبی که شکل غیرمحدب مفروض را دربرمی‌گیرد به صورت غیر ضروری بزرگ باشد، بخش عظیمی از خصوصیات مورد نظر مسئلهٔ اصلی نادیده گرفته می‌شود. آنچه ما می‌خواهیم کوچکترین شکل محدبی است که شکل اصلی را می‌توان در آن جا داد.

راه سرراست‌تری هم برای پرداختن به این مسئله وجود دارد. مثلا چرخ دندانه‌دار شکل ۵ را در نظر بگیرید. اگر یک حلقه کش‌نواری کشیده شده روی این چرخ دنده بیندازیم، کش نواری از روی دندانه‌های چرخ دندانه‌دار رد می‌شود و شکل محدبی پدید مـی‌آورد کـه می‌توان آن را بادامک نامید (شکل ۵ ج را ببینید). براحتی می‌توان ثابت کرد که هیچ شکل محدب کوچکتری نمی‌تواند این چرخ دندانه‌دار را درخود جا دهد. در این مورد می‌گوییم که بادامک "غلاف محدب" چرخ دندانه‌دار فوق است. در اینجا هم می‌توان کار انجام شده با کش نواری را به قالب ریاضی درآورد. ریاضیدانان برای محاسبهٔ غلاف محدب شکلهای دلخواه، روشهای کارآمدی یافته‌اند.

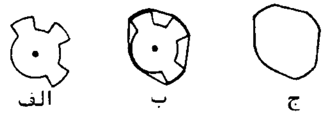
پس جایگزین کردن شکلها با غلاف محدبشان راهی برای مسائل برش و بسته‌بندی شکلهای غیرمحدب فراهم می‌کند. این کار ضمنا به مسئلهٔ برنامه‌ریزی حرکت در شکل ۲ نیز مربوط است که در آنجا می‌خواهیم مسیرهای واصل $P_1$ و $P_2$ را بیابیم، چنانکه از داخل ناحیهٔ مانع هفت‌ضلعی H نگذرند. در شکل ۲ج فرض کنید در نقاط $P_1$، $P_2$ و هر راس H سنجاقی در کاغذ فرو شده و سپس یک کش نواری دور این نُه سنجاق انداخته شده است. کش‌نواری به صورت غلاف محدب درمی‌آید و در عین حال دو مسیر ممکن بین $P_1$ و $P_2$ بدون گذشتن از درون H را مشخص می‌کند.

در صنعت قاعدتا مسیرهایی را اختیار می‌کنیم که کوتاهتر باشند و موجب صرفه‌جویی در زمان و انرژی بشوند. اگر مسیری مثل S را در شکل ۲ ج در نظر بگیریم و آن را به منزلهٔ یک نخ شل تصور کنیم می‌توانیم نخ را مرتبا بکشیم تا تنگتر و تنگتر شود و مسیرهای کوتاهتر و کوتاهتری ایجاد کند تا آنکه مثل کش‌نواری کاملا به حالت کشیده درآید. پس دو مسیری که به وسیلهٔ غلاف محدب مشخص شده‌اند بین مسیرهایی که بترتیب از دست راست یا دست چپ H می‌گذرند کوتاهترین مسیرها هستند (شکل ۶ را ببینید).



**شکل ۴. برای حل مسئلهٔ سینی شکلات، شکلهای انحنادار را به چند ضلعیهایی که تقریبا همانند آنها باشند تبدیل می‌کنیم**






**شکل ۵. بـرای شکل غیرمحدبی چون چـرخ دندانه‌دار الف باید کوچکترین شکل محدبی را که با آن تطبیق می‌کند پیدا کنیم. یک کش نواری فرضی در ب که از روی دندانه‌ها رد می‌شود غلاف محدبی را که در ج دیده می‌شود و به شکل بادامک است مشخص می‌کند**

متاسفانه غلاف محدب با وجود اهمیتی که دارد پاسخگوی همهٔ نیازهای ما نیست. اگر به‌جای رویه‌هـای کفش در شکـل ۱ غلاف محدبشان را بگذاریم، امکان رسیدن به شکل توی هم رفتهٔ آنها را از دست می‌دهیم و جرم بیشتری تلف می‌شود. یک روش مناسبتر آن است که شکلهای غیرمحدب را به جای جا دادن در شکلهای بزرگتر، به صورت تقسیم شده به چند شکل محدب کوچکتر تجسم کنیم.

## بسته‌بندی شکلهای کاملا غیر منظم

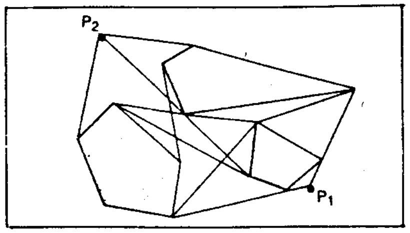
پس برای یافتن ناحیهٔ مانع مثلث مفروض T مثلا نسبت به شش ضلعی غیر محدب شکل ۳ الف، ابتدا شش ضلعی را همان طور که در شکل دیده می‌شود به اجزای محدبی تفکیک می‌کنیم، آنگاه ناحیهٔ مانع مثلث را نسبت به هر جزء بطور جداگانه به‌دست می‌آوریم. سپس می‌توانیم ناحیهٔ مانع مطلوب را به کمک ناحیه‌های مانع اجـزا پیدا کنیم. اگر هم به جای مثلث T شکل غیـر محدبی داشتیم باید آن را هم به اجزای محدبی تفکیک می‌کردیم و هریک از این اجزا را با هر جزء محدب از شش ضلعی غیرمحدب در نظـر می‌گرفتیم.

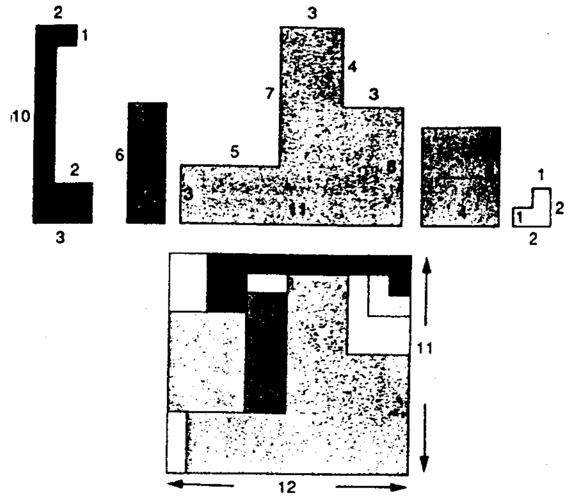
با این روش کلی می‌توانیم الگویی برای بریدن و بسته‌بندی کردن شکلهای کاملا غیرمنظم و غیر محدب به دست بیاوریم. مثلا در شکل ۷ الف، پنج شکل غیرمنظم باید از تخته‌ای به پهنای ۱۲ واحد بریده شود. شکل ۷ ب نشان می‌دهد که چگونه برنامهٔ کامپیوتری فیتز (FITZ) این قطعات را کنار هم می‌چیند تا فقط ۱۱ واحد از طـول تخته مصرف شود. یافتن یک روش اصولی و منظم — یعنی یک الگوریتم — برای تفکیک چند ضلعی به شکلهای محدب کار چندان دشواری نیست. کافی است دستورالعمل زیر را به نوبت برای هر یک از راسهای روبه‌درون چند ضلعی غیرمحدب انجام دهیم: "نیمساز زاویهٔ داخلی مقعر را بکشید و آن را امتداد دهید تا خط موجود را قطع کند".

شکل ۳ ب کاربرد این دستورالعمل را برای تفکیک شش ضلعی غیرمحدب به سه جزء محدب نشان می‌دهد. اگر شکل اولیه v راس رو به درون داشته باشد با این الگوریتم $(v+1)$ جزء حاصل می‌شود. چون هر جزء باید برای یافتن ناحیه‌های مانع به کار رود، این سوال مطرح می‌شود که آیا این الگوریتم سادهٔ شکل اولیه را به کمترین تعداد اجزای ممکن تفکیک می‌کند یا نه. پاسخ منفی است ولی ماجرا به همینجا ختم نمی‌شود. در اینجا باید دید آیا می‌توانیم راه مناسبی برای تفکیک چند ضلعیهای غیرمحدب به کمترین تعداد اجزای محدب پیدا کنیم؟

کم‌کم کار به جاهای باریک می‌کشد. چنیـن الگوریتمهایی عموما پیچیده از آب درمی‌آیند و برنامه‌های عملی کامپیوترها برای کاربردهـای صنعتـی معمـولا از موشکـافی کامل در این‌گونه تحلیلهای ریاضی پرهیز می‌کنند. با این حـال می‌توانیم برای بسیاری کاربردهای شامل شکلهای پیچیـده، مثـل طراحـی کاغذهـای دیواری برنامه‌های کامپیوتری بنویسیم. هر طرح کاغذ دیواری آرایش دوبعدی تکراری و منظمی از یک نقش اصلی است. الگوهای برش شکل ۱ اساسا

**شکل ۶. شبکه‌ای از مسیرهای ممکن با احتراز از چند مانع، برای وضعیت مربوط به شکل ۲**






شکل ۷. رعایت صرفه‌جویی در بریدن شکلهایی از یک تخته

در زمرهٔ طرحهای کاغذ دیواری قلمداد می‌شوند. قضیهٔ معروفی به نام قضیهٔ فدوروف وجود دارد که می‌گوید تنها ۱۷ نوع مختلف نقش کاغذ دیواری وجود دارد. ریاضیدانی مجارستانی به نام ل. فِیِس‌توث (L.Fejes tóth) نمادهایی ریاضی براساس حرف w برای این نقشها ابداع کرده است. نقشی که در شکل ۱ الف دیده می‌شود از نوع $w_1$ است.

علت اهمیت داشتن این الگوهای منظم در تولید کفش آن است که برش به وسیلهٔ ماشینی انجام می‌شود که از لحاظ نحوهٔ حرکت محدودیتهای نسبی دارد. قسمت برشگر دستگاه طول چرم را می‌پیماید و ضمن این کار یک ردیف از قالبها را می‌برد. سپس ضمن بازگشت ردیف دیگری از قالبها را می‌برد. در بعضی از ماشینها قسمت برشگر می‌تواند به اندازهٔ ۱۸۰° بچرخد و قالبها را مطابق الگوهایی که در شکل ۱ ب و ۱ ج دیده می‌شود ببرد. این الگوها در نامگذاری فیس توث از نوع $w_2$ محسوب می‌شوند.

فیس توث ثابت کرد که اگر قالبها به‌صورت شکلهای محدب باشند و از ورقه‌های بزرگ بریده شوند، برای دسته‌ای از شکلهای قالب، بهترین آرایش نوع $w_1$ هیچ‌گاه ورقهٔ چرم را اقتصادی‌تر از بهترین آرایش نوع $w_2$ نمی‌برد. در موارد عملی که شکلها غیرمحدب و ورقه‌ها دارای ابعاد محدودند نیز وضع اغلب (و نه همیشه) بر همین منوال است.

سرانجام با دانستن شیوهٔ کار در مورد شکلهای غیرمحدب می‌توانیم به مسئلهٔ برنامه‌ریزی عملی حرکت برگردیم. شک نیست که بین مسئلهٔ ساختگی حرکت مثلث حول یک چهار ضلعی در صفحه و مسئله‌ای عملی مثل تعیین حرکتهای متوالی در یک روبوت صنعتی که در خط مونتاژ قطعه‌ای را در محل خاصش کار می‌گذارد تفاوت چشمگیری وجود دارد. تفاوت میان مسائل ساختگی و عملی در چیست؟

اولا، در اغلب موارد چندین مانع و نه فقط یک مانع بر سر راه حرکت وجود دارد که باید از تصادم با آن پرهیز شود. شکل ۶ شبکه‌ای از نخهای واصل نقاط $P_1$ و $P_2$ را نشان می‌دهد. هر نخ مربوط است به یک مسیر رفتن از $P_1$ به $P_2$ که از سمت چپ برخی مانعها و سمت راست مانعهای دیگر می‌گذرد و ضمنا محکم کشیده شده است به‌طوری



که طولش تا حد ممکن کوتاه است. اکنون یافتن کوتاهترین راه از $P_1$ به $P_2$ نیازمند یافتن مسیری در یک شبکه است. این منظور هم به وسیلهٔ ریاضیدانان با ابداع الگوریتمهای کارآمد برآورده شده است.

در مسئله ساختگی امکان وجود مرزهای مفروضی برای فضا نیز نادیده گرفته شده است ولی این امر مشکل خاصی پیش نمی‌آورد. این گونه مرزها را می‌توان در حکم لبه‌های موانع بسیار بزرگی دانست که به این ترتیب مسئلهٔ اساسا تازه‌ای طرح نمی‌شود. شیوهٔ کار در مورد مرزهای غیر محدب خمیده را هم قبلا دیده‌ایم.

مسلما بزرگترین محدودیت مسئلهٔ ساختگی در آن است که تنها با حرکتهای خاصی که انتقالهای ممکن در صفحه هستند سروکار دارد. با این‌حال بسیاری از مطالب گفته شده را می‌توان تعمیم داد. مثلا می‌توانیم غلافهای محدب را برای اشیای سه‌بعدی تعریف کنیم و شیوه‌های کارآمدی برای یافتن آنها عرضه کنیم. ولی از این حد هم باید فراتر برویم. وقتی مثلث T را بدون چرخش در صفحه حرکت می‌دهیم، موضعهای اختیار شده به توسط T را می‌توانیم با دادن مختصات (x و y) برای نقطه‌ای نشانی دقیقا مشخص کنیم. مجموعهٔ همه آرایشهای ممکن T نسبت به Q فضای حالتها نامیده می‌شود. پس برای این مسئله، فضای حالتها اساسا همان فضای فیزیکی یعنی صفحه‌ای است که عمل جابه‌جایی در آن انجام می‌شود. هر دوی آنها را می‌توان به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از زوجهای اعداد (x و y) بیان کرد.

اکنون فرض کنید بپذیریم که مثلث ضمن حرکت بتواند به نحوی بچرخد. حال، برای بیان موقعیت مثلث در هر لحظه سه عدد (x، y، q) لازم است که در آن q بیانگر زاویهٔ جهت مثلث است. در اینجا فضای حالتها سه بعدی است هرچند که فضای فیزیکی همچنان دوبعدی باقی مانده است.

در برنامه‌ریزی حرکت روبوتها، فضای فیزیکی سه بعدی است ولی چون علاوه بر انتقال، چرخش هم صورت می‌گیرد، فضای حالتها عملا شش‌بعدی است. این مسئله مثل هر مسئلهٔ دشوار دیگری، روشهای مختلفی برای دستیابی به جواب را مطرح ساخته و در حال حاضر نیز زمینهٔ پژوهشهای گسترده‌ای را تشکیل می‌دهد. مشخص‌کردن مفاهیم هندسی بنیادی از قبیل آنچه در برنامه‌ریزی حرکتها نهفته است ریاضیدانان را به یاری تولید کنندگان صنعتی فراخوانده است تا به بازده بیشتر و استفادهٔ اقتصادی‌تر از مصالح دست یابند. □

New Scientist 12 August 1989

## رکورد جهانی انجماد

پروفسور فرانک پوبل، فیزیکدانی از دانشگاه بایریت آلمان، بعد از ۵ سال، رکورد دماهای بسیار پایین را از ژاپنیها پس گرفت. او ۱۳۰ گرم مس خالص را تا ۱۲ میکروکلوین سرد کرد، یعنی فقط ۱۲ میلیونیم درجه بالاتر از صفر مطلق. رسیدن به صفر مطلق که برابر است با ۲۷۳/۱۵− درجهٔ سانتیگراد امکانپذیر نیست. او همچنین دمای یک قطعهٔ ۱۷ کیلوگرمی مس را با استفاده از شیوه‌ای مغناطیسی به ۱۵ میکروکلوین رساند. به این ترتیب فیزیکدان آلمانی به نقطه‌ای رسیده است که با توجه به امکانات سنجش موجود، گذشتن از آن امکانپذیر نیست. به گفتهٔ او شاید حتی حالا هم بتوان قطعات کوچکتر مس را به دمای ۸ یا ۹ میکرو کلوین رساند، اما نباید فراموش کرد که ما با اندازه‌گیری دما هم تولید گرمایی می‌کنیم که به نوبهٔ خود باعث می‌شود دستگاه سنجش دمای بالاتری را نشان دهد.

برای پوبل، مسئله اصلی سنجش این دما نیست؛ او می‌تواند قطعهٔ ۱۳۰ گرمی مس را تا دو روز و قطعهٔ ۱۷ کیلو گرمی را حتی تا دو هفته در دمایی زیر ۲۰ میکرو کلوین نگاه دارد. این مدت زمان برای آزمایشهای بعدی کافی خواهد بود.

پوبل و همکاران او امیدوارند تا به کمک این آزمایشها، به‌خصوصیات فلزات، شیشه و هلیوم مایع در دماهایی پی ببرند که این مواد درفضا تحت تاثیر آنها هستند. ممکن است که این تحقیقات، زمینه‌ای شوند برای کسب دانش بیشتر در مورد ساختار ماده.