

از قوانین تفکر تا کاربرد منطق در کامپیوتر، آرتور سانگالی، دانشمند، سال ۷۷، شماره ۱۱،

بهمن ۱۳۶۸، ص ۵۱-۵۸

نوشته آرتور سانگالی

ترجمه: مهندس محمد باقری

say THIS IS AN ALIEN

books in the library,

is a human being

the library.

the library.

THIS IS AN ALIEN

THIS IS AN ALIEN

THIS IS AN ALIEN



از قوانین تفکر تا کاربرد منطق در کامپیوتر

به مناسبت صدویست و پنجمین سالگرد درگذشت جرج بول

تاثیر اندیشه‌های او را بر منطق، ریاضیات و علوم کامپیوتر مرور می‌کنیم

اصطلاحات تخصصی استفاده کند. به نظر می‌رسد که مخاطبان او ذهنهای فرهیخته و نه فقط متخصصان هستند. وی معمولاً نقل‌قولهایی از شاعران و فیلسوفان به همان زبان اصلی یونانی یا لاتین می‌آورد و به اقتضای کلام از منطق به روان‌شناسی، جامعه‌شناسی یا ماورای طبیعت روی می‌آورد.

بول اعتقاد دارد که اعمالی که ذهن هنگام استدلال انجام می‌دهد تابع قوانین "جبری" خاصی مشابه با قوانین اعمال معمولی برای کمیته‌های عددی - جمع، ضرب و غیره - هستند. وی براساس این قوانین بنیادی که خود آنها را با استفاده از نمادهای ریاضی بیان می‌کند، شیوه‌ای برای حل مسئله‌های منطق پدید می‌آورد. ابتدا پذیره‌ها یا فرضهای ابتدایی به صورت معادله درآورده می‌شوند. سپس به جای روند معمولی استنتاج منطقی، اعمال جبری روی این نمادها انجام می‌شود. بدین ترتیب استدلال از طریق "محاسبه" صورت می‌گیرد یا به عبارت صریح‌تر، منطق به جبر تبدیل می‌شود.

البته منظور بول از "منطق" صرفاً آن چیزی است که اکنون جبر رده‌ها (کلاسها) و منطق گزاره‌ها نامیده می‌شود. اما پیدایش نوعی نگرش اساساً تازه که منطق ریاضی نوین از آن زاده شده، مرهون بول است. در جبر رده‌ها که ابداع اوست، هر گردایه (کلیکسیون) از اشیاء با یک حرف نمایش داده می‌شود. مثلاً می‌توان قرار گذاشت که a

یک و یک ربع قرن پیش از این، مردی چشم از جهان فروست که به گفته برتراند راسل، کاشف ریاضیات محض بوده است. جرج بول^۱ که شاید بیش از هر چیز به خاطر جبرهایی که به نام اوست یا به عنوان آفریننده منطق نوین شهرت دارد یکی از پرنفوذترین اندیشمندان قرن نوزدهم بود. رساله معروف او به نام قوانین تفکر که در سال ۱۸۵۴ منتشر شد، امکانات تازه‌ای نه فقط برای منطق یا ریاضیات بلکه همچنین برای علم محاسبه، الکترونیک که هنوز زاده نشده بود، فراهم آورد. ببینیم میراث علمی بول - اندیشه‌ها، روشها و کشفیات او - چه نقشی در پیدایش علوم و تکنولوژی در جهان امروز داشته است. بد نیست ابتدا نگاه سریعی بیندازیم به شاهکار او که عنوان کاملش چنین است: پژوهشی در قوانین تفکر که شالوده نظریه‌های ریاضی منطق و احتمالات هستند. بول اثر خود را با این سخنان بلندپروازانه آغاز می‌کند: "... برای پژوهش در قوانین بنیادی آن دسته از اعمال مغز که منجر به انجام استدلال می‌شود، برای بیان کردن آنها در زبان نمادی حساب و بر این اساس، پدید آوردن علم منطق و ایجاد روشهای مربوط به آن... ضمناً در جریان این کاوشها می‌خواهد" برخی آگاهیهایی ممکن درباره ماهیت و سازمان بندی ذهن بشر به دست آورد.

بول در مباحثی که اساساً ریاضی است به طور چشمگیری می‌کوشد تا حتی‌القدور کمتر از

۱. نگاه کنید به مقاله جرج بول و جبر بولی در دانشمند، ویژه الکترونیک (شماره ۲۷ اسفند ۱۳۶۵)

صفحه ۴۴ تا ۴۶.

۲. گردایه یا کلیکسیون به مجموعه‌ای گفته می‌شود که هر عنصرش یک مجموعه باشد.

نشانه رده همه کسانی که "دچار ایدز هستند"، h رده افراد "سالم"، v رده کسانی که حامل ویروس ایدز هستند و b رده اشخاصی باشد که با خون تماس داشته‌اند. رده کلی، یا رده همه اشیا مورد بحث را با 1 نشان می‌دهند (در این مثال، "مردم" $(1 =)$). نماد 0 در حکم رده تهی یا رده‌ای است که هیچ عضوی ندارد. رده‌هایی را که از رده‌های دیگر با اعمال خاصی به دست می‌آیند به وسیله عبارت‌های جبری نشان می‌دهند. مثلا ab عبارت است از رده همه اشیا که هم عضو a و هم عضو b هستند (آن عده از مبتلایان به ایدز که با خون تماس داشته‌اند) و $v - 1$ رده آن تعداد از اشیا مورد نظر است که عضو v نیستند (حامل ویروس ایدز نیستند). اگر دو رده هیچ عضو مشترکی نداشته باشند "مجموع آنها را" (با نماد $h + a$) می‌توان تشکیل داد که عبارت است از رده همه کسانی که سالم یا دچار ایدز هستند. به این ترتیب روابط بین رده‌ها را می‌توان به صورت معادله نوشت.

ایدز از دیدگاه منطق

برای روشن شدن موضوع، فرض می‌کنیم که ویروس ایدز می‌تواند فقط از طریق رابطه جنسی یا تماس یافتن با خون منتقل شود. علاوه بر این، می‌گوییم کسی "دچار ایدز" محسوب می‌شود که گذشته از حمل ویروس ایدز، "نشانه‌های ایدز" هم در وی مشاهده شود. این رابطه‌ها را می‌توان در قالب دو معادله زیر نوشت:

$$v(1 - (x + (1 - x)b)) = 0$$

$$a = vs$$

که در اینجا x و s به ترتیب رده کسانی هستند که رابطه جنسی داشته‌اند و کسانی که نشانه‌های ایدز در آنها دیده شده است. از روابط فرض شده بین رده‌ها، رابطه‌های دیگری "منطقاً" به دست می‌آیند و به عبارت دیگر در آنها مستترند. روش بول یک رشته قانون برای حل کردن دستگاه معادلات و تعبیر جواب عرضه می‌کند تا رابطه‌های مستتر معلوم شوند. مثلاً حل دستگاه فوق برای یافتن $sx + (1 - s)$ نهایتاً منجر به معادله زیر می‌شود:

$$(1 - s) + sx = a(1 - b) + (1 - a)v + (0/0)ab + (0/0)(1 - v)$$

که تعبیر آن چنین است: رده همه کسانی که یا نشانه‌های ایدز در آنها نیست یا از رابطه جنسی پرهیز نکرده‌اند (با هر دو) مشکل است از همه مبتلایان ایدز که با خون تماس نداشته‌اند، همه حاملان ویروس ایدز که ایدز نگرفته‌اند، بخش نامعینی از - برخی، هیچ یک از، یا همه - مبتلایان به ایدز که با خون تماس داشته‌اند و بخش نامعینی از رده افرادی که حامل ویروس ایدز نیستند. این همان رابطه کامل موجود میان رده‌های داده شده است که در فرضها مستتر است.

در مورد کسانی که با دیدن مثالهایی نظیر آنچه در بالا ذکر شد هنوز به قدرت این روش پی نبرده‌اند پیشنهاد بول این است که: "حل مسئله را به وسیله قوانین منطق معمولی امتحان کنند و در عین حال توجه کنند که پیچیدگی موجود در مسئله فوق‌العاده بیشتر می‌شود و تاثیر این کار هم تنها پرزحمت‌تر شدن حل مسئله است، هر چند که این کار بالاخره شدنی است." وی همچنین از روش خود بر اساس جنبه‌های زیباشناسی دفاع می‌کند و می‌گوید کمال هر روش علاوه بر توانایی و کارایی، به هماهنگی و زیبایی متجلی شده در آن بستگی دارد - نظری که با معیارهای امروزی چندان مورد توجه نیست.

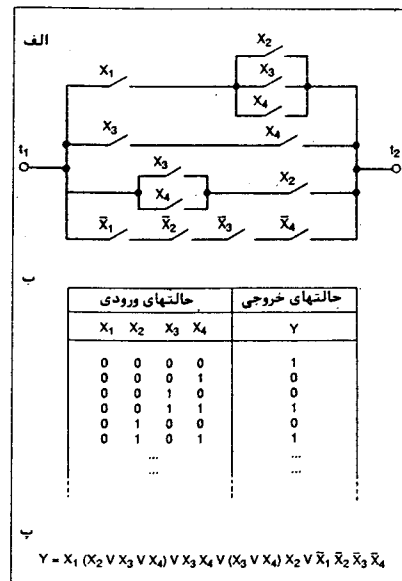
بول حساب خود را به منطق گزاره‌ها تعمیم داد که با گزاره‌هایی در مورد گزاره‌ها (و نه در مورد رده‌های اشیا) سروکار دارد، مثلاً، "اگر گزاره x درست باشد، آنگاه گزاره x درست است" و نظایر آن. وی هنگام به کار گرفتن این حساب در تحلیل برخی برهانهای کلاسیک مربوط به ماورای طبیعت و اخلاق، متوجه می‌شود که مشکل عمده، تعیین دقیق مقدمات یا پیش فرضهای استدلال است. زیرا وقتی این کار صورت بگیرد و پیش فرضها در قالب معادلات نمادی بیان شود، حساب گزاره‌ها او را به طور قاطع و خود به خود به نتیجه‌گیریهای منطقی هدایت می‌کند. این جنبه روش او وی را به برداشتی از مفهوم "محاسبه پذیری موثر" می‌رساند (که تنها یک قرن بعد به وسیله آلن تورینگ طراح ماشین تورینگ که بنیادی‌ترین ابزار محاسبه است - بدقت تعریف شد) که به نظر او "با دقتی که کم و بیش تابع عوامل مکانیکی است" صورت می‌گیرد.

بول همچنین راجع به دستگاه منطق ارسطویی که اعتباری دیرپا داشته و در آموزش سنتی از

جایگاه مهمی برخوردار بوده بحث می‌کند به این قصد که "یکی دو کج فهمی رایج در مورد گستره و اعتبار آن" را برطرف کند. او با این ادعای منطق ارسطویی مخالف است که هر استنتاج منطقی را می‌توان به یک قیاس تبدیل کرد (نمونه‌ای از قیاس، استنتاج گزاره همه الف‌ها ج هستند، از این دو گزاره است که همه الف‌ها ج هستند و همه ب‌ها ج هستند). بول نتیجه می‌گیرد که حقایق منطق سنتی بسیار ناقصند و آن قدر بنیادی نیستند که بتوانند یک علم را بسازند.

ابداع بول با گذشت سالها پیراسته و اصلاح شده در بسیاری جهات تعمیم یافته و بیان اولیه او جای خود را به دستگاههای ساده‌تر داده است. با وجود این، اعتبار روش او به رغم همه کاستیهایش محفوظ مانده و گذشته از هر چیز

شکل ۱. مدار علامتدهی راه آهن: الف آرایشی برای کلیدهای ورودی x_1 تا x_4 نحوه ارتباط دو سر t_1 و t_2 به یکدیگر را نشان می‌دهد. جدول ب چگونگی وابستگی حالت خروجی y را به حالات x ها نشان می‌دهد و در پ همین اطلاعات در قالب جبر بولی بیان شده است.



نمایانگر آن است که چگونه منطقی را می‌توان با ریاضیات پیوند داد.

بول و نظریه احتمالات

برخلاف آثار وی در زمینه منطق، به کارهایی که بول در نظریه احتمالات انجام داده چندان اشاره‌ای نشده است. ظاهراً آخرین کسی که به اندیشه‌های بول در این مبحث توجه کرده مینارد کینز (در حدود ۷۰ سال پیش) بوده است. این اقتصاددان برجسته، در رساله‌ای راجع به احتمالات، به برتری روشهای خود که در مقایسه با روشهای بول ساده‌تر است اشاره می‌کند، با این حال یادآوری می‌شود که نوشته‌های بول سرشار از ابداع و نبوغ است. شاید بتوان گفت که مورخان نتوانسته‌اند نقش وی را در پیشرفت نظریه احتمالات بدرستی نشان دهند. برخی از مفاهیمی که بول ابداع کرد اکنون جا افتاده است و در حوزه‌های مختلفی از دعاوی بیمه گرفته تا تشخیص پزشکی، کاربردهای عملی یافته است.

برای ارزیابی اهمیت و اصالت اندیشه‌های بول باید گذشته از وضعیت و سابقه اجتماعی خود بول، به اوضاع ریاضیات در انگلستان آن روز توجه کرد. او که فرزند یک کفاش بود پس از اتمام تحصیل در مدرسه، به حرفه معلمی روی آورد تا بتواند به پدر و مادرش کمک کند. در سن ۱۸ سالگی و بدون برخورداری از هیچ‌گونه آموزش ریاضی فراتر از حد مقدماتی، غرق مطالعه رساله‌هایی در مکانیک و آنالیز شد و ریاضیات را هم به همان شیوه‌ای آموخت که زبان یونانی و تا حد زیادی زبان لاتین را فراگرفته بود - یعنی از طریق خودآموزی. چند سال بعد مقاله‌های او در مجله‌های ریاضی چاپ می‌شد و یافته‌های او در زمینه آنالیز و معادلات دیفرانسیل شهرتی برایش به ارمغان آورد. رساله‌ای از وی با نام روشی کلی در آنالیز به خاطر مکاتبات ریاضی مهمی که بین سالهای ۱۸۴۱ و ۱۸۴۴ برانگیخته بود برنده نشان زرین جامعه سلطنتی شد.

آوازه روزافزون نبوغ ریاضی بول در سال ۱۸۴۹ با انتصاب وی به سمت استادی در کالج نویسیاد کوئین واقع در کرک (جنوب ایرلند) به اوج خود رسید. در همان ایام، مکتب ریاضی انگلستان، نقش عظیمی در پیشرفت و اصلاح جبر به عهده داشت. چهار ریاضیدان انگلیسی در این امر سهم غنده را داشتند: جرج بیکنک،

اگوستوس دومرگان، چارلز بیج و دونکن گرگوری. اما قدرت ذهن بول بود که توانست آوازگر تبدیل جبر به رشته‌ای شود که علاوه بر اعداد با "اشیا" و "اعمال" انتزاعی هم سروکار داشت که قانونهای ترکیب حاکم بر آنها مهمتر از ماهیت خود آنهاست. بول دستاورد دیگری نیز به گنجینه دانش عرضه کرده است: کشف پایاها (کمیت‌های تغییر ناپذیر) که بعدها آرتور کیلی در دانشگاه کمبریج و جیمز سیلوستر در دانشگاه جانز هاپکینز آمریکا و نیز کسانی در دانشگاه آکسفورد آن را به طور کامل گسترش دادند. این کار تازه جبری بعدها به صورت نظریه ریاضی پایانی (تغییر ناپذیری) درآمد، که علاوه بر کاربردهای مهمی که در ریاضیات دارد در نظریه نسبت اینشتین نیز

نقش تعیین کننده‌ای داشته است.

نخستین کاربردهای فنی جبر منطق بول در سال ۱۹۴۰ مطرح شد و این وقتی بود که کلود شانون ریاضیدان آمریکایی جبرهای بول را در تحلیل مدارهای راهگزی (سویچینگ) به کار برد. این مدارها از رله‌های قطع و وصلی تشکیل شده‌اند که عملاً در همه دستگاه‌های برق طرح شده برای انجام خودکار اعمال پیچیده، مثل مرکز تلفن یا مدار علامت‌دهی راه‌آهن به کار می‌روند. در آغاز، مدار بندیهای کامپیوتر نیز از رله و کلید ساخته شده بود ولی بعدها این اجرا جای خود را به اجزای سریعتر و کوچکتری دادند. جبرهای بولی چگونه وارد صحنه می‌شوند؟ برداشت حسی ما از کلید چیزی است که "یا

پیوست ۱: مجموعه‌ها و زیبایی جبرهای بولی

فرض کنید گردایه‌ای (کلکسیون) از اشیای $x, y, z, \dots$ داریم که با ترکیب هر زوج از آنها می‌توان اشیای دیگری به صورت xy و xy به وجود آورد که به ترتیب "اجتماع" و "اشتراک" آنها خوانده می‌شوند. همچنین به ازای هر x یک شی $\bar{x}$ وجود دارد که "متمم" x خوانده می‌شود. سرانجام، دو شی خاص وجود دارند که به صورت 0 و 1 نشان داده می‌شوند (بی آنکه لزوماً همان 0 و 1 حساب باشند). اگر این گردایه، در "قانون"های زیر صدق کند می‌گویند یک جبر بولی تشکیل داده است:

$$xy = yx, \quad x(yz) = (xy)z$$

(قوانین جابجایی پذیری)

$$x1 = x, \quad x0 = 0$$

(قوانین همانی)

$$x(yz) = (xy)z, \quad x(yz) = (xy)z$$

(قوانین بخش پذیری)

$$x\bar{x} = 0, \quad x\bar{x} = 1$$

(قوانین متمم)

اگر با زبان نظریه مجموعه‌ها آشنا باشید، گردایه همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه

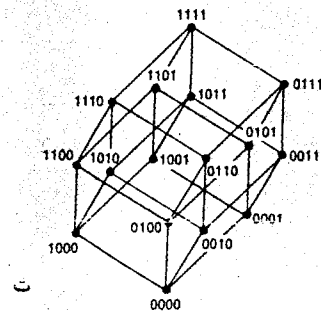
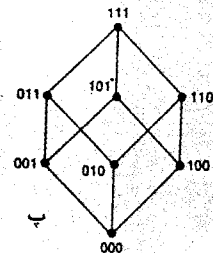
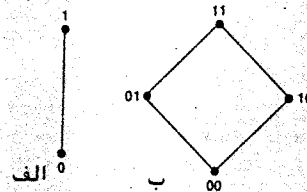
۱. گزاره صوری گزاره‌ای است که انطباق یا عدم انطباق آن با واقعیت عینی مورد نظر نیست.

در حالت وصل است یا در حالت قطع". تعریف دقیقتر آن، چیزی است که "همیشه در یکی از دو حالت مجزا از هم قرار دارد." این حالات را به طور فیزیکی می‌توان از راههای مختلفی مثلاً وجود یا عدم جریان پدید آورد. این دو حالت را عموماً با دو نماده 0 و 1 نشان می‌دهند. اکنون با مشخص شدن اینکه چگونه حالات تعداد خاصی از کلیدهای خروجی $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ به حالات کلیدهای ورودی $X_1, X_2, \dots, X_n$ بستگی دارد، می‌توانیم تعیین کنیم که یک مدار راهگزی در تحلیل نهایی چه اعمالی انجام می‌دهد. به عنوان مثال مدار مختلط (سری - موازی) شکل ۱ الف را در نظر بگیرید. حروف X_1, X_2 و غیره نشانه کلیدها یا زبانه‌هایی

هستند که می‌توانند باز (در حالت 0) یا بسته (در حالت 1) باشند. کلیدهای همنام به طور همزمان باز یا بسته هستند. نمادهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ نشانه کلیدهایی هستند که در هر لحظه حالتشان خلاف حالت $X_1, X_2, \dots, X_n$ غیره است. نقاط 0 و 1 در مدار هستند. این دو نیز در حکم دو سر یک "کلید" هستند که اگر جریان بین دو سرش برقرار باشد در حالت 1 است و اگر برقرار نباشد در حالت 0 است. بنابراین حالت این کلید خروجی Y (بین 0 و 1) به وسیله حالت چهار کلید ورودی X_1, X_2, X_3, X_4 و X_5 کاملاً معین می‌شود. برای مشخص کردن حالت خروجی در هر یک از 16 (2^4) ترکیب ممکن حالات ورودی می‌توان جدولی را به کار گرفت

در آنها به جای x, y, z عناصره یا گذاشته شود درست باشد، آنگاه به ازای عناصر هر جبر بولی دیگری نیز درست خواهد بود. خاصیت فوق منجر به نتایج عملی در کاربردهای این نظریه می‌شود زیرا حل بسیاری از مسائل را به روند "مکانیکی" از مودن ها و ها تبدیل می‌کند. عناصر هر جبر بولی را می‌توان در یک شکل شبکه مانند و براساس

رابطه ترتیبی موجود در قوانین آن جای داد (شکل زیر را ببینید). در این ترتیب عنصر x مقدم بر y است هرگاه $x = xy$. طی ۵ ساله اخیر نظریه جبرهای بولی و ساختارهای مرتبط با آن به صورت شاخه گسترده‌ای از ریاضیات محض درآمد که هم در ریاضیات و هم در موارد غیر ریاضی کاربردهایی دارد.



جبرهای بولی را می‌توان به صورت شبکه نشان داد. هر عنصر (که به صورت نقطه‌ای نشان داده می‌شود، به شیوه منظمی با یک عدد دوتایی نامگذاری می‌شود: الف نشان دهنده یک جبر بولی دو عنصری است، ب یک جبر بولی چهار عنصری، پ یک جبر بولی هشت عنصری مثل تصویر مسطح مکعب سه بعدی، و ت یک جبر بولی ۱۶ عنصری است که همان تصویر مسطح مکعب چهار بعدی است.

اشتراک اجتماع

x	y	xy	xvy
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

متمم

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

شکل ۲. کوچکترین جبر بولی تنها دو عنصر دارد، ۰ و ۱. این جدولها طرز تشکیل حالات "اجتماع"، "اشتراک" و "مکمل" آنها را نشان می دهد.

(شکل ۱ ب). مثلاً، اولین سطر جدول نتیجه این امر است که اگر هر چهار کلید ورودی در حالت ۰ (باز) باشند آنگاه ۰ در حالت ۱ است، زیرا جریان از پایین ترین شاخه مدار عبور می کند. چنین جدولی معرف حالت خروجی به صورت تابعی از حالات ورودی است و به این ترتیب، تحلیل مدارهای راهگزینه منجر به مطالعه تابعهای دو مقدار یا دوتایی از n متغیر دوتایی می شود. هر تابع از این دست را می توان با سه عمل (اجتماع، اشتراک و متمم) روی جبر بولی دو عنصری به وجود آورد (شکل ۲ را ببینید). این امر موجب می شود بتوانیم آن تابع را (و در نتیجه آن مدار را) به وسیله معادله ای بر حسب نمادهای جبر بولی نشان دهیم. مثلاً، تابع مربوط به مدار شکل ۱ را (با استفاده از علامت $\vee$ برای اجتماع) می توان به صورت معادله بولی زیر بیان کرد:

$$Y = X_1(X_2 \vee X_3 \vee X_4) \vee X_3 X_4 \vee (X_3 \vee X_4) X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$$

زیرا اگر به جای حروف X_1, X_2, X_3, X_4 و $\bar{X}$ حالت های ورودی را بگذاریم و اعمال بولی را انجام دهیم حالت خروجی مربوط به آنها حاصل می شود. عکس این کار هم ممکن است، یعنی با داشتن معادله، مدار کامل را می توان ساخت. برای طرح یک مدار یا شبکه خاص، باید ابتدا آنچه مورد نیاز است به صورت دستگاهی از معادلات بولی بیان شود و سپس این معادلات به کمک اعمال جبری یا از راههای دیگر ساده

شود. سرانجام می توان به آن معادلات با استفاده از سخت افزار مناسبی چون رله و ترانزیستور تحقق عینی بخشید.

کامپیوتر الکترونیکی نمونه خوبی از دستگاههای رقمی (دیجیتال) است. در این کامپیوتر علایم یا اطلاعات به صورت ارقام پیاپی منتقل می شود. اگر تنها از دو رقم استفاده کنیم، یک دستگاه رقمی دوتایی خواهیم داشت. ماشینهای حساسگری که داده های گسسته عرضه می کنند عموماً دوتایی هستند تا دقت و قابلیت اطمینان بیشتری داشته باشند. اصطلاح "مدار منطقی" معمولاً در مورد مدارهایی به کار می رود که اعمالی روی علایم دوتایی انجام می دهند. این موضوع ما را دوباره به تابعهای دوتایی از n متغیر دوتایی و در نتیجه به ساختن آنها با استفاده از سه عمل اصلی بولی برمی گرداند. مدارهای منطقی از اجزایی ساخته می شوند که درجه منطقی نام دارند و بر طبق اعمال اساسی بولی یا ترکیبهای آنها عمل می کنند (شکل ۳). برخلاف زبانهای مدار شکل ۱، دریچه ها در هر دو جهت عمل نمی کنند و علایم تنها از ورودی به سوی خروجی جاری می شوند. این مدارها را با توجه به رابطه بین اعمال بولی و منطق گزاره ها، مدارهای منطقی نامیده اند. گزاره عبارت است از حکمی که بتوان آن را به عنوان درست یا غلط رده بندی کرد مثلاً: جرج بول در مسکو به دنیا آمد (غلط)، جرج بول در سال ۱۸۶۴ درگذشت (درست)، درست یا غلط دو ارزش درستی ممکن برای گزاره هاست. اگر X و Y دو گزاره باشند، آنگاه " X یا Y " (ترکیب فصلی آنها) و " X و Y " (ترکیب عطفی آنها) نیز گزاره هستند. همچنین برای هر گزاره X گزاره دیگری به صورت " $\bar{X}$ " (نفی آن) وجود دارد. طبق قرارداد، ارزش درستی این گزاره های مرکب به صورت زیر تعیین می شود:

X و Y درست است اگر هم X و هم Y درست باشند، وگرنه غلط است؛ X یا Y درست است اگر یا X یا Y درست باشند وگرنه غلط است. نه X درست است اگر X غلط باشد و غلط است اگر X درست باشد. مثلاً، جرج بول در مسکو به دنیا آمد و در سال ۱۸۶۴ درگذشت، جرج بول در مسکو به دنیا آمد یا در سال ۱۸۶۴ درگذشت درست است، اما جرج بول در سال ۱۸۶۴ درگذشت، غلط است. اگر درست را با ۱ و غلط را با ۰ نشان

دهیم، آنگاه جبر بولی دو عنصری (شکل ۲) جبر ارزشهای درستی خواهد بود. در جدولهای شکل ۲ اگر xy ارزش درستی گزاره های X و Y باشند، آنگاه $x\bar{y}$ ، $\bar{x}y$ ، $x\bar{y}$ و $\bar{x}\bar{y}$ به ترتیب ارزش درستی X و $\bar{Y}$ ،

X یا Y و نه X هستند.

اساس همه این کاربردهای جبر بولی را در مدارها، دستگاههای رقمی، منطق گزاره ها و غیره - یک نظریه ساده ریاضی تشکیل می دهد:

پیوست ۲: مدارهای منطقی و محاسبه در پایه دوتایی

می شود پیش می رود. مثلاً بعد از افزودن ۱۱۰۱ و ۱۰۱ به یکدیگر محاسبه انجام شده روی صفحه به صورت زیر خواهد بود:

(1)	(1)	(0)	(1)	(0)	دو بر یک
0	1	1	0	1	اعدادی که باید جمع شوند
0	0	1	0	1	خروجیها
1	0	0	1	0	مجموع

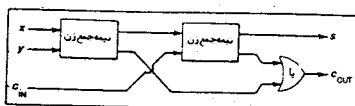
معادله های بولی که به ازای هر ترکیب ممکن از ورودیها، S و C_{out} را می دهند چنین اند:

$$S = (x \vee y) \bar{x} \bar{y} \quad C_{in} \\ C_{out} = xy \vee (x \vee y) C_{in}$$

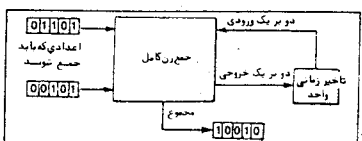
که در آن $x \vee y$ عمل "یا یا انحصاری" است (منظور از آن x یا y ولی نه هم x و هم y است) و بر حسب اعمال اصلی بولی طبق معادله زیر تعریف می شود:

$$(x \vee y) = (x \vee y) \bar{x} \bar{y}$$

مدار جمع زن کامل را می توان با استفاده از دو نیمه جمع زن ساخت.



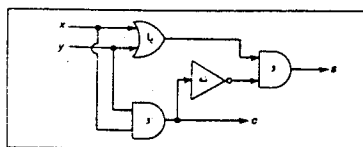
در کاربرد عملی به کمک یک ابزار تاخیر دهنده، "دو بر یک" مانده از هر مرحله را ذخیره می کنند و پس از یک واحد زمانی، آن را در مرحله بعدی وارد کار می کنند.



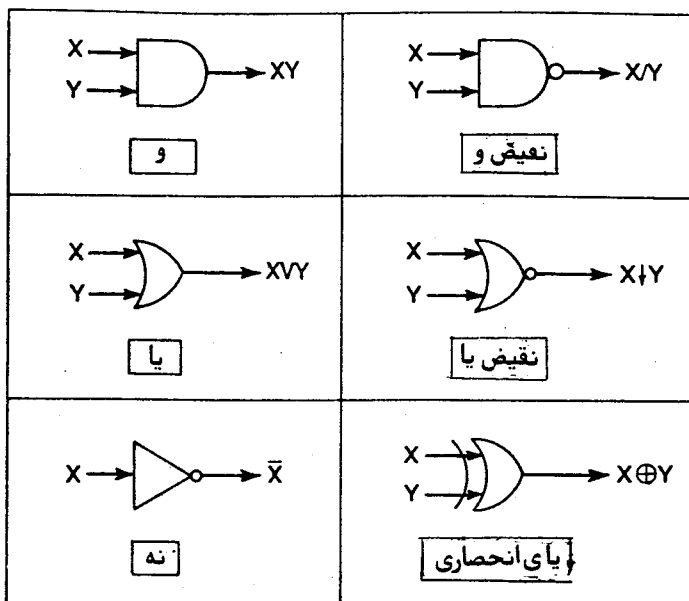
در هر کامپیوتر رقمی، اعداد به صورت رشته هایی از ۰ها و ۱ها نشان داده می شوند. با این فرض که اعداد مزبور در پایه ۲ نوشته می شوند عدد ۱۳ به صورت "۱۱۰۱" درمی آید ($1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$). سپس محاسبه ها در حساب به مبنای ۲ یا در پایه دوتایی انجام می شود. برای روشن شدن نحوه استفاده از مدارهای منطقی در محاسبه، طرز طراحی یک جمع کننده دوتایی را نشان می دهیم. کار را با یک نیمه جمع زن شروع می کنیم که دو رقم دوتایی x و y را جمع می کند و خروجی آن آخرین رقم (رقم یکان) حاصل جمع و c رقم دو بر یک (به قیاس ده بر یک "دستگاه اعشاری") است. مثلاً اگر $x = 1$ و $y = 1$ ، آنگاه (در پایه ۲) $1 + 1 = 10$ بنابرین در اینجا $S = 0$ و $c = 1$. معادله های بولی مربوط به نیمه جمع زن چنین است:

$$S = (x \vee y) \bar{x} \bar{y} \\ c = xy$$

و مدار مربوط به آن به صورت زیر است:



جمع زن کامل، دو عدد دوتایی را مرحله به مرحله باهم جمع می کند. این جمع زن سه ورودی دارد که x ، y و C_{in} هستند، C_{in} "دو بر یک" مانده از مرحله قبلی است. خروجی این جمع زن رقم یکان مجموع (S) و دو بر یک (C_{out}) است که در مرحله بعد به کار می رود. محاسبه مثل عمل جمع معمولی اعداد که با مداد و کاغذ انجام



شکل ۳. نمادهایی که در نقشه مدارها برای نمایش دریاچه‌های منطقی به کار می‌رود

بول طی آخرین سالهای زندگیش نیز مثل گذشته فعالانه کار می‌کرد و آثار خود را منتشر می‌ساخت و در عین حال، به طور پیوسته با دریافت جوایز، مدارک و عضویت افتخاری در مجامع علمی مورد تقدیر قرار می‌گرفت. در روز ۸ دسامبر ۱۸۶۴، هنگامی که فقط ۴۹ سال داشت و در اوج خلافت ریاضی خود بود، مرگ ناگهان به سراغش آمد. در سال ۱۸۴۶ شعری به نام او سروده شد که حرف اول مصراعهایش نام جرج بول را می‌ساخت و سخن دو سطر آغازین آن بعدها کاملاً به حقیقت پیوست:

چاودان ماند چو رفتی، نیک مردا، نام تو
بس فراتر زانکه از خارا کنند اندام تو

حساب نمادی تابعهای دوتایی از ۲ متغیر دوتایی. این ابزار زاینده، قوه ابداع ذهن بول است و بعدها که ریاضیدانان و مهندسان معاصر به آن نیاز پیدا کردند آن را پیشاپیش آماده یافتند. شیفتگی بول نسبت به روشهای نمادی - که در منطق روسفید از آب درآمد - موجب پایبندی بول به یکی از اصول فکریش شد که: استفاده از نمادها باید به منزله ابزاری برای رسیدن به یک مقصد باشد که آن مقصد عبارت است از علم به یک واقعیت یا حقیقت قابل درک. آیا او می‌دانست که روزی نمادها می‌توانند "قابل درک" برای ماشینهای حسابگر هم باشند و اینکه می‌توانند برای انتقال اطلاعات محض - بی آنکه پروای حقیقت در کار باشد - به کار روند؟

۳. شعر اصلی در زبان انگلیسی با دو سطر زیر آغاز می‌شود که حروف G و E در آغاز آنها حروف نخست نام بول (GEORGE) است:

"Great man, thy fame will live when thou art gone,
Ennobling thee far more than sculptur'd stone."

داشند