ریاضیات حاکم بر یک جهان ساختگی، آندرو واتسون، *دانشمند*، سال ۲۶، شمارهٔ ۹، آذر ۱۳۶۷، ص ۴۷-۵۲.

نوشتهٔ آندرو واتسون، عضو بخش ریاضی دانشگاه ملبورن ـ استرالیا
ترجمهٔ محمد باقری

ریاضیات حاکم بر یك جهان ساختگی

جهانی که در آن به سر می‌بریم دارای چهار بعد است، سه بعد مکان و یک بعد زمان. ریاضیدانان اخیرا دریافته‌اند که فضای چهار بعدی دارای ویژگیهایی استثنایی است.

ریاضیدانان دریافته‌اند که فضای چهار بعدی خواص ریاضی منحصر به فردی دارد که آن را از فضاهای با ابعاد دیگر متمایز می‌کند. آنان اندیشه‌های ریاضی را از نظریه‌پردازان مبانی فیزیک به عاریت گرفته و با مفهومهای انتزاعی، در حوزه‌ای از ریاضیات به نام توپولوژی درآمیخته‌اند. حاصل این کار چیزی است که به‌گمان عده‌ای مهمترین دستاورد ریاضیات طی قرن حاضر به‌شمار می‌آید.

تمایل فیزیکدانان بر آن است که جهان روزمره را در قالب چهار بعد فضا ـ زمان توصیف کنند. از سوی دیگر بعضی فیزیکدانها ترجیح می‌دهند که تعمیمهایی در مورد فضاهای با ابعاد بیشتر صورت دهند. یکی از راههای پرداختن به این موضوع توسل به توپولوژی است که در آغاز به عنوان مطالعه انواع سطحها پدید آمد. اما توپولوژیستها خود را به سطحهای دوبعدی معمولی محدود نمی‌کنند و به مشابه‌های آنها در بعدهای بیشتر چشم دارند. این فضاها "بَسْلایه" نامیده می‌شوند. مثلا رویهٔ میز که بخشی از صفحه است، یک بسلایهٔ دوبعدی است. بسلایه‌ای که در مقیاس کوچک مسطح به نظر می‌رسد ممکن است در مقیاس بزرگ خمیدگیهای عجیب و غریبی پیدا کند. در اینجا توپولوژیستها مثل نقشه برداران، نقشهٔ قطعه‌های بسلایه را تهیه کرده و با چیدن آنها در کنار یکدیگر تصویری از کل بسلایه به دست می‌آورند.

سطح کره نیز یک بسلایهٔ دو بعدی ساده است و در ریاضیات آن را به صورت S^2 می‌نویسند (که البته عدد ۲ در آن به معنی توان نیست). عدد ۲ به معنی آن است که برای مشخص کردن هر نقطه از بسلایه دو عدد لازم است. چنان که اتاقی که در آن به سر می‌بریم یک بسلایهٔ سه بعدی است زیرا برای توصیف کامل هر نقطهٔ درون اتاق سه عدد لازم است که همان مختصات نقطه‌اند.

"بعد" نمونهٔ چیزهایی است که توپولوژیستها آنها را کمیت توپولوژیکی می‌نامند. یکی از ویژگیهای کلی هر بسلایه این است که به جزئیات دقیق شکل خود بستگی ندارد. به همین علت گاهی توپولوژی را "هندسهٔ صفحهٔ لاستیکی" نیز خوانده‌اند. از دیدگاه توپولوژیست، اشیایی چون توپ فوتبال و توپ راگبی (که شکل تخم مرغی دارد) یکسانند. توپ فوتبال را می‌توان به طور هموار (بدون تغییرات ناگهانی) به شکل توپ راگبی درآورد. چهره‌ای که بر توپ فوتبال نقش بسته باشد با این کار کج و معوج می‌شود ولی هر دو شئ در کیفیت "توپ‌بودن" مشترک‌اند و برای توپولوژیستها هم همین مهم است. ولی به عکس، در هندسه هیچ‌گاه توپ فوتبال و توپ راگبی یکسان به شمار نمی‌آید.

مثال دیگری از فضای دو بعدی، جعبهٔ خالی است. گرچه جعبه هم مانند توپ فوتبال و راگبی فضایی را در بر می‌گیرد، ولی با آنها کمی تفاوت دارد. سطح توپها هموار و پیوسته است. سطح جعبه پیوسته است ولی هموار نیست و لبه‌های تیز ناجوری دارد. همین هموار نبودن نشانهٔ تمایز مهمی است. کنجها و لبه‌های تیز از دید ریاضیدانها عناصر "نامطلوب" قلمداد می‌شوند. شیوه‌های ریاضی حساب دیفرانسیل و انتگرال که برای توصیف رفتار کمیتهای دارای تغییرات پیوسته به کار می‌رود، در اینجا دیگر کارساز نیست. حساب دیفرانسیل و انتگرال با منحنیهای هموار سروکار دارد نه خطهای شکسته و ناهموار. اینجاست که کاخ ریاضی بسلایه‌ها به لرزه درمی‌آید.

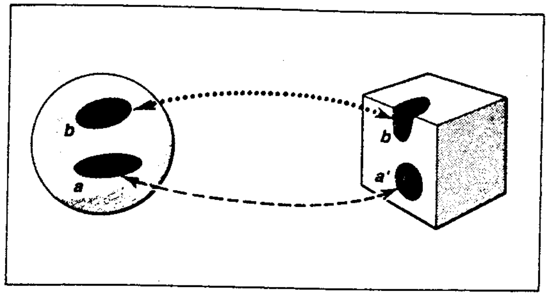
با این حال، می‌توانیم هر نقطهٔ روی جعبه را با نقطه‌ای روی کره یکی بگیریم. انتقال از یک نقطهٔ روی جعبه به نقطهٔ دیگری روی کره، پیوسته است زیرا هیچ‌گونه سوراخ یا بریدگی در میان نیست و در همه سوی آنها نقاط فراوانی برای

برقراری ارتباط وجود دارد. ولی این انتقال به علت وجود لبه‌های تیز روی جعبه، هموار نیست (شکل ۱ را ببینید). در مقابل، توپهای فوتبال و راگبی را می‌توان به‌طور هموار و پیوسته، به شکل یکدیگر درآورد.

توپولوژیستها در پی آنند که بدانند آیا می‌توان فلان نوع بسلایه را به طریق هموار و پیوسته‌ای به بسلایهٔ دیگری تبدیل کرد. این روش ریاضی به آنها کمک می‌کند تا بسلایه‌ها را در انواع گوناگون رده بندی کنند. آنها می‌توانند مثل شیرینی‌پزها، یک تکه خمیر به شکل نامنظم را بردارند و همهٔ بیقوارگیهای آن را هموار کنند و آن را مثلا به صورت یک توپ معمولی یا به شکل تخم مرغ یاسوسیس درآورند. توپولوژیستها می‌کوشند این روش را در مورد بسلایه‌هایی از هر بعد به‌کار بگیرند. با این حال درمواردی به دردسر می‌افتند.

بسلایه‌ای که‌بین‌ریاضیدانها این همه جاروجنجال به پا کرده به صورت R^4 (ار-چهار) نمایش داده می‌شود. عدد "۴" یعنی این فضا چهار بعدی است و منظور از "R" این‌است که هر چهار عدد لازم برای مشخص کردن نقاط، اعداد حقیقی‌اند. R^4 فضایی است که ما در آن زندگی می‌کنیم. ریاضیدانها نشان داده‌اند که این فضا دارای خواص عجیب و غریبی است.

روشنتر بگوییم، گروهی از ریاضیدانان، به سرپرستی مایک فریدمن از دانشگاه کالیفرنیا (امریکا) و سیمون دونالدسون از دانشگاه اکسفورد (انگلستان) بسلایه‌ای غیرعادی به‌نام "R^4 ساختگی" کشف کرده‌اند. این موجود توپولوژیکی خودش‌هموار است ولی اگر چه می‌توان آن را به طور پیوسته به شکل "R^4 معمولی" درآورد، این تغییر شکل هموار نیست. تکهٔ کوچکی از R^4 ساختگی شبیه تکهٔ کوچکی از R^4 معمولی به نظر می‌رسد ولی در مقیاس بزرگ این دو بسلایه یکی نیستند. وجود دو R^4 در حالی که انتظار می‌رود فقط یک R^4 موجود باشد کاملا مایهٔ تعجب است. توپولوژیستها با اعمال تغییر شکلهای هموار بر بسلایه‌های سه بعدی و بسلایه‌های پنج بعدی و ابعاد بیشتر، موفق به رده بندی بسلایه‌ها شده‌اند. آنان انتظار داشتند که همین تدبیر در چهار بعد نیز به کار بیاید.



شکل ۱. بخش a از کره به طور هموار و پیوسته به بخش a' از جعبه تغییر شکل می‌دهد؛ b نیز به b' تغییر شکل می‌دهد ولی این تغییر شکل هموار نیست.

آیا واقعا معنای R^4ساختگی چیست؟ در ستون سمت چپ شکل۲ تعدادی مربع به نشانهٔ بخشی از R^2 که یک صفحهٔ دو بعدی است ترسیم شده‌اند. اگر در اولین مربع از بالا، یک دایرهٔ کوچک (S^1) رسم کنیم، می‌توانیم آن را آن قدر بزرگ کنیم تا هر مقدار از صفحهٔ (R^2) را در بر بگیرد. مربعهای ستون دست راست، بخشی از R^2 ی ساختگی هستند. حال دایره‌ها را از ستون‌اول به‌دومی انتقال می‌دهیم. در مورد دایره‌های کوچک مشکلی پیش نمی‌آید و تغییر شکل هموار و پیوسته است، اگر چه ممکن است بی‌نظمیهای کوچکی بروز کند. با پایین رفتن در ستون، متوجه می‌شویم که‌برای‌دایره‌هایی که به قدر کافی بزرگند، شئ ظاهر شده در فضای ساختگی، دندانه‌دار است. به‌خصوص، همیشه بخشی که آن را به‌صورت ناحیهٔ سایه خوردهٔ u نشان داده‌ایم وجود دارد که به‌خارج از بزرگترین شئ هموار حاصل از انتقال یک دایره به R^2 ی ساختگی منتقل می‌شود. این در حالی است که هر ناحیهٔ u واقع در R^2 را همیشه‌می‌توان توسط دایره‌ای با بزرگی مناسب احاطه کرد.

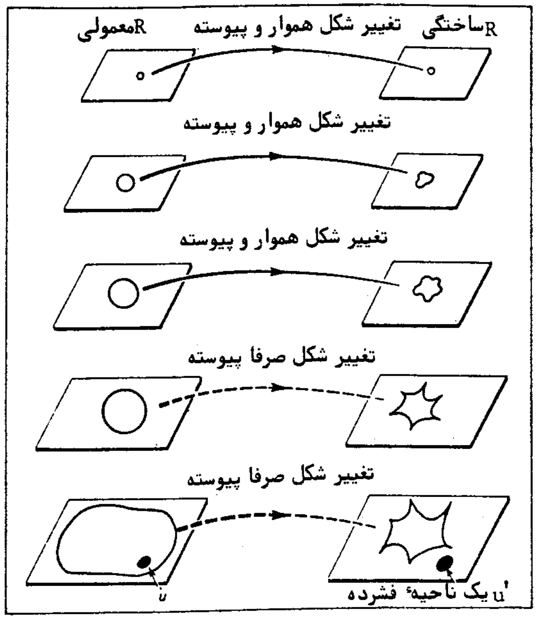
به یادداشته باشید که‌شکل ۲ صرفا تمثیلی ۲بعدی است از آنچه در چهار بعد رخ می‌دهد.

در واقع، چنین مسئله‌ای در دو بعد اصلا مطرح نیست. در چهار بعد، تغییر شکل از S^3 یعنی کرهٔ سه بعدی که بخشی از R^4 معمولی را احاطه می‌کند به R^4 ساختگی صورت می‌گیرد. اما بزرگترین S^3 ای که بتوان آن‌را به‌طورهموار‌به R^4 ساختگی برد مانند دایرهٔ واقع در R^2 نیست. این کره به‌اندازهٔ کافی بزرگ نیست که آن را به‌تمامی در بر بگیرد و همیشه ناحیهٔ فشرده‌ای وجود دارد که درون کرهٔ انتقال یافته واقع نیست. نگفته پیداست که ترسیم حالت مربوط به R^4 کار آسانی نیست.

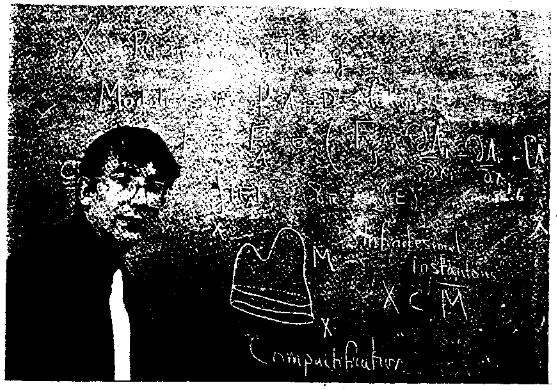
پس برای یک کرهٔ کوچک اوضاع کاملا روبه‌راه است زیرا تغییر شکل هموار و پیوسته است و دو فضا یکسان به نظر می‌رسند. مشکل با کره‌های بزرگتر آغاز می‌شود که در آنها تغییر شکل دیگر هموار نیست. همین عامل بوده که فیزیکدانها را تکان داده و توجه آنها را به خود جلب کرده است. فیزیکدانها با دنیای واقعی سرو کار دارند و نظریه‌هایی طرح می‌کنند که رفتار ماده و نیروها را درون ان جهان توصیف کند. ماهیت واقعی جهان چهار بعدی برای آنها بسیار مهم است. مثلا آنان گرانش (جاذبه) را به عنوان انحنای فضا-زمان چهاربعدی توصیف می‌کنند.

بنابراین، امکان وجود R^4 ساختگی این بحث را پیش می‌کشد که فیزیکدانها باید خواص "سراسری" این‌نظریه‌های فیزیکی را مورد توجه قرار دهند و برخلاف روال فعلی‌شان بر خواص موضعی تکیه نکنند. اما گسترهٔ این "سراسری" تا کجاست، یا به عبارت دیگر بزرگترین کره‌ای که می‌توان آن را به طورهموار از یک R^4 به R^4 دیگر تصویر کرد به چه بزرگی است؟ شاید به بزرگی جهان، شاید به اندازهٔ یک اتم، یا طول 10^{-35} متر مطرح شده توسط پلانک که به نظر کیهان شناسان در این مقیاس ساختار فضا و زمان ممکن است درهم بریزد. آیا به راستی ما در جهان R^4 معمولی زندگی می‌کنیم یا در یک R^4 ساختگی و اصلا چطور می‌توانیم پاسخ این سؤال را بدانیم؟ پاسخ این سؤالها را نمی‌دانیم ولی می‌توانیم حدس بزنیم که شیوهٔ صحیح بیان قوانین فیزیکی به زبان حساب دیفرانسیل و انتگرال، بستگی دارد به اینکه کدام شق قضیه درست است. نوع حساب دیفرانسیل و انتگرالی که به‌کار می‌بریم بستگی دارد به نوع بسلایه‌ای که با آن سروکار داریم، پس یافتن پاسخ این سؤال برای فیزیکدانها مهم است. بدین ترتیب این کشف می‌تواند در حکم زنگ خطری برای فیزیکدانان و ریاضیدانان باشد.

این فکر که R^4 دارای یک مشابه ساختگی باشد چیز تازه‌ای است ولی مدتهاست که ریاضیدانان دریافته‌اند که‌بعضی فضاها خواص‌غیرعادی‌همانندی دارند. پیش از آنکه فریدمن و دونالدسون کارهای خود را عرضه کنند، ریاضیدانان می‌دانستند که بسلایه‌های سه بعدی یا با ابعاد کمتر چیزی به عنوان همتای ساختگی ندارند. همین گفته در مورد همهٔ



شکل ۲. نمایشی دو بعدی برای مفهوم R^4 ساختگی.



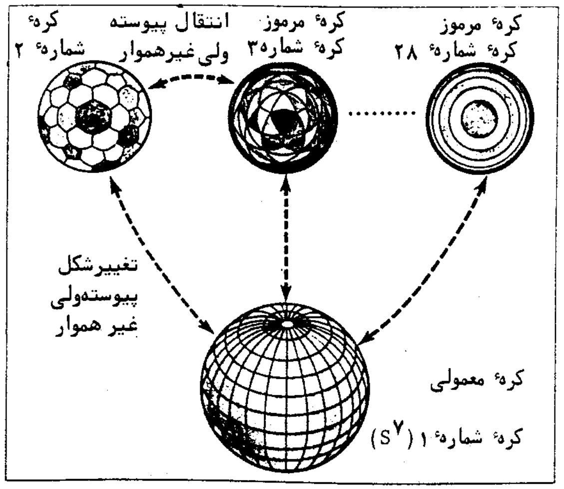
شکل ۳. سیمون دونالدسون ضمن کشفیات خود در فضاهای ریاضی به جهانهای چهار بعدی نامتعارفی برخورده است.

بسلایه‌های R^n که در آنها n مقادیر از یک تا بینهایت به استثنای چهار را اختیار می‌کند صادق است. اگر به مثال مربوط به کره و جعبه برگردیم، در آنجا با تغییر شکلی به یک فضای ساختگی مواجه نیستیم، زیرا جعبه خودش هموار است. در اینجا به عکس، هم R^4 و هم R^4 ساختگی هموارند ولی انتقال نقاط بین آنها هموار نیست.

کره‌ای در فضای هفت‌بعدی (S^7) مثال رایجی در مورد بسلایه‌های دارای خواص غیر عادی است. در سال ۱۹۵۶، جان میلنور نشان داد که همهٔ بسلایه‌هایی که می‌توان آنها را با تغییر شکل پیوسته به S^7 تبدیل کرد و به عکس، در ۲۸ ردهٔ مختلف جای می‌گیرند و "کره‌های مرموز" را تشکیل می‌دهند (شکل ۴ را ببینید). هر دو بسلایهٔ متعلق به یک ردهٔ خاص را می‌توان به طور پیوسته و هموار به یکدیگر تبدیل کرد، اما بین بسلایه‌های متعلق به رده‌های مختلف چنین رابطه‌ای هموار موجود نیست. دلیلی ندارد که به هفت بعد اکتفا کنیم؛ برای کره‌هایی از ابعاد بیشتر، تعداد کره‌های مرموز سر به میلیونها می‌زند.

هیچ یک از موارد فوق مایهٔ نگرانی فیزیکدانها نیست، چرا که آنها روی هم رفته به مطالعهٔ جهان واقعی بسنده می‌کنند. از اینها گذشته، قوانین فیزیک خوشبختانه در S^7 جاری نیست، زیرا وجود کره‌های مرموز حاکی از وجود انواع مختلف حساب دیفرانسیل و انتگرال یا انواع مختلف مشتق‌گیری مناسب برای استفاده روی این کره‌هاست. به عبارت دیگر، مثلا حاکی از این است که از یک تابع روی نوعی کره نمی‌توان همان طور مشتق گرفت که روی کرهٔ دیگر گرفته می‌شود. در مورد دنیایی براساس S^7، فیزیکدانها ناگزیرند مشخص کنند کدام نوع دارای معنای فیزیکی است. پس اینک، کشف فضای مرموز R^4

شکل ۴. کرهٔ ۷ بعدی (S^7) و دوستان مرموزش. همهٔ اینها کره‌های هفت بعدی‌اند و همه را می‌توان با تغییر شکل پیوسته به یکدیگر تبدیل کرد. اما ۲۸ ساختار مشتق پذیر متمایز در کرهٔ هفت بعدی وجود دارد.



ساختگی به معنای آن است که فیزیکدانها به ناچار با چنین مسئله‌ای در جهان واقعی روبه‌رو خواهند بود.

انتشار مقالهٔ مایک فریدمن در سال ۱۹۸۲ در مجله *هندسه دیفرانسیل* موجب شد که ریاضیدانان فضاهای چهاربعدی را خیلی بهتر درک کنند. وی دستوری ابداع کرد که نه تنها به کمک آن می‌توان نشان داد که چه موقع انتقال پیوستهٔ دو بسلایه در چهار بعد به‌یکدیگر ممکن است، بلکه با آن می‌توان رده بندی توپولوژیکی بعضی از R^4ها را هم عرضه کرد. ذکر کلمهٔ "توپولوژیکی" مهم است زیرا در مقالهٔ فریدمن اشاره‌ای به هموار بودن بسلایه‌ها دیده نمی‌شود. با وجود این، همین کار ارزنده توانست نشان فیلدز را (که در حکم جایزهٔ نوبل ریاضیدانان است) نصیب فریدمن کند. انگیزهٔ اولیهٔ فریدمن، اقدام وی به‌حل حالت چهار بعدی مسئله معروفی در توپولوژی سه بعدی، موسوم به حدس پوانکاره بود (نگاه کنید به مقاله *مسئله حیرت‌انگیز هانری پوانکاره* مجلهٔ *دانشمند* دی ماه ۱۳۶۵).

فریدمن با استفادهٔ وسیع از روشی موسوم به "جراحی" توانست به هدف خود برسد و مهمتر اینکه توانست طرحی برای رده‌بندی بسلایه‌ها عرضه کند. دانشجوی جوانی از دانشگاه آکسفورد اندیشهٔ فریدمن را فراتر برد. سیمون دونالدسون با اثبات قضیهٔ مهمی دربارهٔ خواص هموار بودن R^4 ها برندهٔ نشان فیلدز هم شد. او دریافت که بسیاری از بسلایه‌های مورد قبول فریدمن نمی‌توانند هموار باشند. وی طی مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۳ منتشر شد و در مجله *هندسهٔ دیفرانسیل* نیز به‌چاپ رسید، شرطی برای هموار بودن بسلایه‌ها بیان کرد. دونالدسون برای دستیابی به این قضیه برخی مفاهیم را که ابتدا دانشمندان فیزیک انرژی کشف کرده بودند گسترش داد و آمیزهٔ کاملا غیرمنتظره‌ای از دو رشتهٔ توپولوژی و فیزیک نظری پدید آورد.

نکتهٔ اساسی این است که شرایطی که باید در دو نوع بسلایه موجود باشد ــ آنهایی که ارتباطشان هموار و پیوسته است و آنهایی که ارتباطشان پیوسته است ولی هموار نیست ــ متفاوتند. وجود R^4 ساختگی تنها بخشی از ماجراست. برای ابعاد سه یا کمتر، رده بندی بسلایه‌ها بر حسب توپولوژی یا بر حسب همواری به جواب یکسانی منتهی می‌شود. وقتی به بعد پنج یا بیشتر برویم، وضع دیگر چنین نیست ولی تفاوت موجود را می‌توان بر اساس مباحث جا افتادهٔ توپولوژی، مثلاً آنچه در مورد S^7 دانسته شده، بیان کرد. آمیزهٔ نتایج حاصله توسط فریدمن و دونالدسون نشان می‌دهد که تنها در چهار بعد است که با پدیده‌ای کاملا غیرعادی روبه‌رو می‌شویم. گویی بسلایهٔ چهار بعدی خواص هموار بودنش را از ابعاد کمتر به خاطر دارد و هوای توپولوژی ابعاد بالاتر را در سر می‌پروراند. اما این دو نمی‌توانند با هم کنار بیایند، به طوری که نظریه‌های کارامد در ابعاد دیگر، در بعد چهار بی‌فایده می‌شوند. از دیدگاه ریاضی، چهار بعد می‌تواند مصیبتی قلمداد شود یا آنکه میدانی برای زورآزمایی به شمار آید، بسته به اینکه از دریچهٔ چشم کدام ناظر بنگریم.

فریدمن به اتفاق چند تن دیگر، ابتدا دریافتند که کار دونالدسون در جوار نتایج فریدمن حاکی از وجود یک R^4 ساختگی است. اما با آنکه آنها وجود R^4 ساختگی را ثابت کردند چیز زیادی دربارهٔ خواصش نگفتند. در سال ۱۹۸۳، ریاضیدان دیگری از دانشگاه برکلی به نام رابرت گومف وجود سه R^4 ساختگی دیگر را ثابت کرد. دو سال بعد، گومف عدد سه را به بینهایت افزایش داد. اما گرفتاری به همین‌جا ختم نشد و در ماه مه سال ۱۹۸۷ کلیفورد تاوبس یکی دیگر از پیشتازان این پهنه، ثابت کرد که تعداد R^4 های مرموز "بینهایت ناشمارا" است (تعداد اعداد صحیح "بینهایت شمارا" است، مجموعهٔ "بینهایت ناشمارا" تعداد عناصرش از تعداد عددهای صحیح بیشتر است و بنابراین نوعی بینهایت از مرتبهٔ بالاتر محسوب می‌شود).

پس ظاهرا بینهایت R^4 ساختگی وجود دارد ولی این R^4ها به چه شکلی هستند؟ جواب این است که هیچ کس نمی‌داند، زیرا هیچ کس نتوانسته است نمونهٔ گویایی از آنها را بسازد. تا وقتی هم که این کار انجام نشود هیچ کس قادر به پاسخ گویی نخواهد بود. R^4 ساختگی اولیه‌ای که دونالدسون مطرح کرده به خوبی قابل درک است و توصیفی که قبلا در موردش بیان شد کم و بیش بهترین توصیفی است که ریاضیدانان امروزه می‌توانند عرضه کنند.

البته ریاضیدانها هم بیکار

نشسته‌اند. درمواجهه با تعداد بینهایتی از اشیا، اولین‌واکنش آنها سعی در رده بندی این اشیاست. دونالدسون رهبری این مبارزهٔ خاص را بر عهده دارد. ولی هنوز اندکی از راه دسترسی به یکرده‌بندی‌کارامد، ناپیموده مانده است. در این گیرودار، عده‌ای دیگر این فکر را پیش کشیده‌اندکه نکند یکی از موجودات مورد توجه دیرینه در توپولوژی یعنی S^4 هم که همان کرهٔ چهار بعدی است، دارای خصوصیات غریب‌ودردسر آفرین باشد، و اینکه آیا روش مطرح شده توسط دونالدسون همهٔ گفتنیها را در مورد خاصیتهای ویژهٔ R^4 گفته‌است؟

فیزیکدانها باید دربارهٔ تعبیر این مطالب تعمق کنند. آنان تا کنون دلایل بسیاری داشته‌اندکه‌ویژگیهای‌اختصاصی برای چهار بعد قائل شوند. قوانین عکس مجذور (مثل‌قانون گرانش نیوتون) در بیش از سه بعد فضایی صادق نیست، یعنی مادهٔ اتمی و مدارهای سیارات در آنها ناپایدار است و فرو می‌پاشد. تنها در چهار بعد است که الکترون دارای یک ضد ذرهٔ متناظر، یعنی پوزیترون است. توضیح چپگرد بودن نوترینوها هم در سه یا پنج بعد مقدور نیست. آری، این نتایج تازهٔ به دست آمده از ریاضیات، نشان دهندهٔ ماهیت ریاضی منحصر به فرد جهان چهار بعدی است. شاید این تصادفی بیش نباشد، اما در این صورت، تصادفی دانستن این موضوع به چه‌نتایجی‌منتهی خواهد شد؟ □

ماخذ: *New Scientist*
2July 1988