× **رامانوجان، مرد فرمول**، یان استوارت، *دانشمند*، سال ۲۶، شمارهٔ ۳، خرداد ۱۳۶۷، ص ۲۴–۲۸ و ۹۹–۱۰۳؛ تجدید چاپ در: *کارشناس* (نشریهٔ کانون کارشناسان رسمی دادگستری)، سال ۱۴، شمارهٔ ۱۶، پاییز ۱۳۷۶، ص۲۰ –۲۸.

رامانوجان، مرد فرمول

نوشتهٔ یان استوارت
ترجمهٔ مهندس محمد باقری

سری نیواسا رامانوجان، دفتردار هندی که فرمولهای شگفت‌انگیزش درهای کیمبریج را به روی وی گشود .

سال گذشته (۱۹۸۷) صدمین سالگرد تولد "سری نیواسا رامانوجان" بود . او ریاضیدانی خود ساخته بود که در آغوش فقر زاده شد و فرمولهایش را روی کاغذ لفاف باطله می‌نوشت تا اینکه سرانجام استادی از دانشگاه کیمبریج اصالت و اهمیت آثار او را کشف کرد .

ژانویهٔ ۱۹۱۳ بود . ترکیه در بالکان گرفتار جنگ بود و اروپا به‌تدریج به سوی درگیری کشیده می‌شد . گادفری هارولد هاردی که در دانشگاه کیمبریج ریاضی درس می‌داد با جنگ میانهٔ خوبی نداشت . هاردی سرفراز بود از اینکه رشتهٔ مربوط به‌حرفه‌اش، یعنی ریاضیات محض، کاربرد نظامی ندارد . وی بعدها در کتابی به نام *دفاعیهٔ یک ریاضیدان* نوشت : "ریاضیات واقعی درجنگ به کار نمی‌آید" .

بیرون از اتاق، برف ملال‌آوری می‌بارید و دانشجوها در لباس بلندشان راه خود را در محوطهٔ دانشکده با شتاب می‌پیمودند . ولی در اتاق کار هاردی، آتشی دلپذیر راه ورود را بر سرما می‌بست . روی میز، نامه‌هایی که با پست صبح رسیده بود پخش و آمادهٔ بازشدن بودند . هاردی نگاهی به پاکتها انداخت . یکی از آنها به خاطر تمبرهای غیرعادیش توجه او را جلب کرد .

نامه‌ای از هند . با مهر پستی مَدرَس، ۱۶ ژانویهٔ ۱۹۱۳ .

هاردی پاکت ضخیم قهوه‌ای رنگ را که در راه قدری تاخورده بود شکافت و یک دسته کاغذ از آن بیرون کشید (پیوست ۱ را ببینید) .

نامه‌ای به پیوست، با خطی ناآشنا، چنین آغاز می‌شد :

"آقای عزیز
مایلم به اطلاعتان برسانم که من در دایرهٔ حسابداری ادارهٔ امانات بندری شهر مدرس دفتردار هستم و دریافتی سالانه‌ام ۲۰ پوند است . در حال حاضر ۲۳ سال دارم . هیچگونه تحصیلات دانشگاهی نداشته‌ام . . . پس از اتمام مدرسه، اوقات فراغتم را صرف ریاضیات کرده‌ام . . . برای خود راه تازه‌ای در پیش گرفته‌ام" .

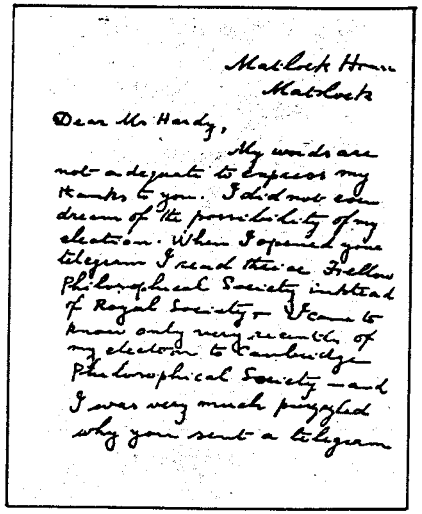
خدایا ! باز یک خیال‌پرداز دیگر پیدا شد . لابد این یکی هم خیال می‌کند موفق به تربیع دایره شده است [۱]. هاردی نامه را کنار گذاشت، ولی چشمانش روی یک مشت علامتهای ریاضی متوقف ماند . فرمولهای غریبی بود . چند تایشان را شناخت . بقیه . . . کم‌وبیش نامانوس بودند .

این شخص به فرض آنکه خیال پرداز باشد، حتما یک خیال‌پرداز معمولی نیست . هاردی به‌خواندن ادامه داد :

"همین اواخر به رساله‌ای از شما برخوردم به نام *مرتبه‌های بی‌نهایت* که در صفحهٔ ۳۶ آن گفته شده که تا کنون هیچ فرمول خاصی برای اعداد اول کوچکتر از عدد مفروض دلخواه، پیدا نشده است . من چنین فرمولی یافته‌ام که با تقریب خوبی بر نتایج واقعی منطبق است و خطای ناچیزی دارد ."

بفرما ! باز هم یک نفر دیگر قضیهٔ اعداد اول را کشف کرده است .

" . . . از شما تقاضا دارم به اوراق ناقابلی که با این نامه می‌فرستم نگاهی بکنید و اگر چیز قابل توجهی در آن دیدید مایلم قضیه‌های خود را منتشر کنم . . . چون تجربه‌ای در این مورد ندارم، هرگونه



Matlock House
Matlock

Dear Mr Hardy,
My words are not adequate to express my thanks to you. I did not even dream of the possibility of my election. When I opened your telegram I read there as Fellow Philosophical Society instead of Royal Society & I came to know only very recently of my election to Cambridge Philosophical Society — and I was very much puzzled why you sent a telegram

نامه‌ای از رامانوجان به هاردی

راهنمایی از طرف شما برایم بسیار ارزشمند خواهد بود . از اینکه چنین زحمتی به شما می‌دهم عذر می‌خواهم .
با ارادت خالصانه
س. رامانوجان"

نه، این یکی مثل خیال‌پردازهای همیشگی نیست . هاردی به فکر فرو رفت . خیال‌پردازهای معمولی طلبکارتر و خودبین‌ترند . نامه را کنار گذاشت و روزنامهٔ تازه را برداشت تا نتیجهٔ مسابقه‌های ورزشی را بخواند . کم‌کم هنگام رفتن به کلاس آنالیز می‌رسید . پالتویش را پوشید، از اتاق خارج شد و در را پشت سرش بست .

هاردی معمولا صبحها را صرف ریاضیات

---

۱. تربیع دایره یکی از سه مسئلهٔ قدیمی است که طی قرنها افراد مختلفی را به خود مشغول داشته است (دو تای دیگر، تضعیف مکعب و تثلیث زاویه نام دارند) . در این مسئله هدف ترسیم مربعی است که مساحتش با دایرهٔ مفروض برابر باشد، البته تنها به کمک خط‌کش و پرگار . با آنکه بعدها ثابت شد این کار ناممکن است، بلندپروازانی بوده‌اند که به سودای شهرت یکشبه با این مسئله کلنجار رفته و گاه به خیال خود موفق به حل آن شده‌اند . — م .

می‌کرد و بعدازظهر در محوطهٔ نزدیک کتابخانهٔ دانشگاه سرگرم تنیس می‌شد. ولی این بار، در بازگشت به اتاق خود حوادث صبح دوباره در ذهنش زنده شد. چند فرمول درهم و برهم که هیچ معلوم نبود درست باشند، همراه با تعدادی فرمول کاملا آشنا که نویسنده آنها را به عنوان ابداع خودش عرضه می‌کرد ــ قضاوت کار آسانی نبود.

عصر آن روز، هنگام صرف شام، هاردی برای هر گوش شنوایی که گیر می‌آورد ماجرا را تعریف می‌کرد؛ از جمله برای همقطار و همکار نزدیکش جان لیتل وود. صرف نوشابه و پسته در اتاق دیدار عمومی، لیتل وود را قدری شنگول کرده بود. برای خرسندی خاطر هاردی، اظهار علاقه کرد از ته و توی قضیه سر در بیاورد. برای

گادفری هاردی، که در این عکس او را هنگام تماشای یک مسابقهٔ ورزشی بین دانشگاهی می بینید، کسی است که رامانوجان را از حضیض گمنامی به اوج شهرت رساند.

۱. چند نمونه از فرمولهایی که رامانوجان برای هاردی فرستاد

$$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots=\frac{15}{2\pi^4}$$

که در آن، جمع‌زنی روی همهٔ اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ... که تعداد مقسوم‌علیه‌های اولشان فرد است انجام می‌شود.

$$\frac{\coth\pi}{1^7}+\frac{\coth 2\pi}{2^7}+\frac{\coth 3\pi}{3^7}+\dots\frac{19\pi^7}{56700}$$

$$\frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1}+\dots=\frac{1}{24}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-a^2}}{2a}+\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}+\frac{3}{a}+\frac{4}{2a}+\dots$$

$$\frac{1}{1+}\frac{e^{-2\pi}}{1+}\frac{e^{-4\pi}}{1+}\frac{e^{-6\pi}}{1}\dots=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{2\pi}}$$

فرمول اخیر کسر مسلسل است و در آن طبق قرارداد نماد ... $\frac{1}{1+}\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\frac{c}{1}$ به معنی کسر مسلسل زیر است:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{b}{1+c}}}$$

گفتگو به اتاق شطرنج که خلوت بود رفتند. وقتی وارد اتاق شدند، هاردی یک دسته اوراق باریک را بالا گرفت و گفت: "این مرد یا لافزن است، یا یک نابغه".

ساعتی بعد، هاردی و لیتل وود رای نهایی خود را اعلام کردند: **نابغه.**

ریاضیدان خود رویده

سری نیواسا رامانوجان ایانگار در روز ۲۲ دسامبر ۱۸۸۷ در یک خانوادهٔ برهمن به دنیا آمد. پدرش حسابدار دون‌پایه و مادرش دختر یک مامور دادگستری بود. زایمان در خانهٔ مادر بزرگ رامانوجان، درخانه‌ای واقع در بخش ارود، در جنوب تامیل نادوی هند، صورت گرفت. دوران کودکی او در کومبا کونام که محل کار پدرش بود، گذشت. این دوران، به رغم فقر خانوادگی و کوچک بودن خانه، به خوشی سپری شد.

استعداد ریاضی رامانوجان خیلی زود آشکار شد. در سن ۱۲ سالگی یک کتاب درسی سطح بالا قرض گرفت و بی‌هیچ دشواری همه مطالب آن را به خوبی جذب کرد. راجع به او نوشته‌اند:

"وقتی در کلاس دوم بود، شدیدا کنجکاو بود بداند **بالاترین حقیقت** در ریاضیات کدام است، و این پرسش را نزد تعدادی از دوستانش در کلاسهای بالاتر مطرح کرد. ظاهرا کسی قضیهٔ فیثاغورس را به عنوان بالاترین حقیقت ذکر کرده بود و کس دیگری بالاترین مقام را برای مبحث **سود و سهام** قائل شده بود".

در پانزده سالگی واقعه‌ای زندگیش را دگرگون کرد. رامانوجان توانست کتابی از ج. س. کار، به نام **چکیدهٔ قضایای مقدماتی در ریاضیات محض** را از کتابخانهٔ کالج دولتی امانت بگیرد.

این **چکیده** مجموعه‌ای از ۶۰۰۰ قضیه بدون ذکر اثبات آنهاست. کار، این اثر را بر پایهٔ مسائلی که در تدریس خصوصی به شاگردان می‌داد تدوین کرده بود. رامانوجان تصمیم گرفت همهٔ فرمولهای این کتاب را ثابت کند. برای این کار هیچ کمکی نداشت و کتاب دیگری هم دراختیار او نبود. این تصمیم، در واقع به معنی پژوهش در ۶۰۰۰ مورد گوناگون بود. برای این منظور، رامانوجان روشهایی ابداع کرد و یافته‌های خود را در نخستین کتاب از یک سری یادداشتها که تا پایان عمر همراهش بود، ثبت کرد.

چون به علت تنگدستی قادر به تهیهٔ کاغذ نبود، محاسبات را روی لوحی سنگی انجام می‌داد و نتایج را در کتابچه‌هایی یادداشت می‌کرد. درسال ۱۹۰۹ ازدواج کرد. در فوریهٔ ۱۹۱۲ یک استاد ریاضی به نام سشو ایار وی را به نزد رائو راماچاندار که درآن هنگام در نلور تحصیلدار بود، فرستاد. رائو در شرح دیدار خود با وی می‌گوید:

"... رامانوجان را به حضور پذیرفتم. چهره‌اش زمخت و صورتش نتراشیده بود، سرووضع مرتبی نداشت، ولی یک چیز در او جلب توجه می‌کرد: درخشش چشمها.... به زودی پی بردم که با موردی غیر عادی سروکار دارم. با این حال معلوماتم اجازه نمی‌داد که راجع به ارزش گفته‌های او قضاوت کنم. چند تا از قضیه‌های ساده‌ترش را نشانم داد. این موضوعات از سطح کتابهای رایج فراتر بودند و یقین کردم که او شخص برجسته‌ای است. رامانوجان مرا آرام آرام تا انتگرالهای بیضوی و سریهای اَبَرهندسی برد و سرانجام نظریهٔ سریهای واگرای او که تا آن زمان هیچجا عنوان نشده بود مرا دگرگون کرد".

رائو برای رامانوجان کاری در ادارهٔ امانات بندری شهر مدرس فراهم کرد. حقوقش ماهی ۳۰ روپیه و کارش طوری بود که وقت آزاد کافی برای پی گرفتن مطالعاتش باقی می‌ماند. این کار یک حسن دیگر هم داشت: او می‌توانست از کاغذهای لفاف باطله برای نوشتن مطالب ریاضیش استفاده کند.

طی همین ایام، رامانوجان در اثر اصرار اطرافیان، نامهٔ احتیاط‌آمیزی به هاردی نوشت. هاردی که دروجود این دفتردار هندی، ریاضیدان بلندپایهٔ خود رویده‌ای را کشف کرده بود، بی‌درنگ دست به کار شد و پاسخ دلگرم کننده‌ای برایش فرستاد. رامانوجان هم فورا جواب نامه را نوشت.

"... شما را دوستی یافتم که نسبت به تلاشهایم احساس همدلی دارد... مطالبی را که تقدیم داشتم بررسی کنید و اگر با نتایج خودتان وفق داد... دست کم بپذیرید که شاید در اساس کار من حقایقی موجود

باشد ... برای حفظ مغزم باید خوراکی فراهم کنم و این اولین چیزی است که مرا به خود مشغول می‌دارد. دریافت هرگونه تاییدیه‌ای از سوی شما کمکم خواهد کرد تا بتوانم در اینجا از دانشگاه یا از دولت بورس بگیرم".

ولی هاردی پیشترکار خود را کرده بود. او نامه‌ای به دفتر امور دانشجویان هندی در لندن نوشته و خواستار یافتن راهی برای تحصیل رامانوجان درکیمبریج شده بود. بعدا معلوم شد که رامانوجان مایل به ترک هند نیست. این تصمیم از طریق دانشگاه مدرس به اطلاع هاردی رسانده شد.

با این حال درکیمبریج تلاش همچنان ادامه یافت. یکی از استادان ریاضی آنجا در همان ایام در مدرس به سر می‌برد و از کارهای رامانوجان هم با خبر بود. وی نامه‌ای به دانشگاه مدرس نوشت و دانشگاه بر اساس همان نامه بورس ویژه‌ای به رامانوجان اعطا کرد. این نخستین باری بود که رامانوجان می‌توانست آزادانه همهٔ وقتش را صرف ریاضیات کند.

هاردی‌هم بیکار ننشست و همچنان کوشید تا از طریق نامه و به توسط مذاکرهٔ حضوری یکی دیگر از استادان کیمبریج، رامانوجان را برای سفر به انگلستان راضی کند. رفته‌رفته تزلزلی در رامانوجان پدیدار شد. بزرگترین سد راه او مادرش بود. ولی یک روز صبح، در مقابل دیدگان متعجب بستگانش، مادر اعلام کرد که الههٔ "ناماگیری" به خوابش آمده و به او دستور داده که مانع تحقق هدف زندگی پسرش نشود.

هزینهٔ معاش دو سال، به اضافهٔ خرج سفر در اختیار رامانوجان قرار گرفت و بدین ترتیب وی رهسپار انگلستان شد. درآوریل ۱۹۱۴ به کالج ترینیتی‌کیمبریج رسید. قاعدتا محیط آنجا باید برایش نامانوس بوده باشد. با این حال ماندگار شد و رساله‌های تحقیقی زیادی منتشر کرد، از جمله آثار بسیار مهمی که با هاردی مشترکا تالیف کردند.

اما راه پیروزی اغلب ناهموار و پرمخاطره است. در سال ۱۹۱۷ وضع مزاجی رامانوجان روبه وخامت گذاشت و وی به ناچار بستری شد. در همین ایام به عضویت انجمن سلطنتی برگزیده شد. افتخاری که برای نخستین بار به یک هندی تعلق می‌گرفت. کالج ترینیتی هم او را به عنوان عضو هیئت علمی پذیرفت.

برخلاف خیلیهای دیگر، نقش هاردی و لیتل‌وود دراین میان‌بسیارسازنده‌بود. رامانوجان قبلا با دو ریاضیدان انگلیسی دیگر هم که در رشتهٔ خود صاحب نظر بودند تماس گرفته بود، ولی آنها دستنوشته‌هایش را بدون هیچ اظهار نظری برگردانده بودند. هاردی و لیتل وود در سیاستهای کالج ترینیتی در زمینهٔ پذیرش اعضا نیز دست داشتند. لیتل وود در جایی می‌نویسد: "من تنها کسی هستم که از حقایق خبردارم و باید آنها را ثبت کنم ولو به صرف اینکه اوضاع مسخره کالج را پس‌از سالهای جنگ ۱۹۱۴ تا ۱۹۱۸ نشان دهم ..."

عده‌ای با انتخاب رامانوجان مخالفت کردند و ظاهرا انگیزه‌های نژاد پرستانه درکاربود. اینکه رامانوجان قبلا به عضویت انجمن سلطنتی پذیرفته شده بود، کار را خیلی راحت‌تر می‌کرد ولی از دید مخالفان این موضوع هم نوعی دسیسه تلقی می‌شد. هاردی عضو کمیتهٔ گزینش نبود ولی لیتل وود در آن‌عضویت داشت و در موضع خود سرسختی نشان می‌داد. سرانجام تلاشهای همه جانبه نتیجه داد و رامانوجان به عضویت کالج ترینیتی پذیرفته شد. این امر شوقی تازه در او برانگیخت و کار ریاضی خود را از سر گرفت.

اما وضع جسمانیش همچنان نامطلوب بود. آب و هوای انگلستان به مزاجش نمی‌ساخت و در آوریل ۱۹۱۹، به هند برگشت. شاید در پیش گرفتن چنین سفر دورودرازی نابه‌جا بود زیراوقتی به مدرس رسید تندرستی‌اش دوباره مختل شده بود. رامانوجان در روز ۲۶ آوریل ۱۹۲۰ چشم از جهان فرو بست. هنگام مرگ فرزندی نداشت و تنها بازماندهٔ او همسرش بود.

***

برای دستیابی به‌کارهای ریاضی رامانوجان، چهار منبع عمده وجود دارد: رساله‌های منتشرشده‌اش، یادداشتهایش، گزارشهای سه ماههٔ او به‌دانشگاه مدرس و دستنوشته‌های انتشار نیافته‌اش. درسال ۱۹۷۶ چهارمین جلد یادداشتهای گمشدهٔ او که عملا به صورت اوراقی از هم گسیخته بود، پیدا شد. برخی از دستنوشته‌های وی هنوز یافته نشده است. اخیرا بروس برنت از دانشگاه ایلینویز

ادامه در صفحهٔ ۹۹

ادامهٔ

رامانوجان، مرد فرمول

بخش اول یادداشتهای رامانوجان را که اثری سه جلدی است ویرایش کرده و کوشیده است اثبات همهٔ فرمولهای گمشدهٔ او را عرضه کند. رامانوجان گذشته‌ای نامعمول داشت و هیچگونه آموزش رسمی نیافته بود. از این رو جای تعجبی نیست که نوشته‌های ریاضیش مهر و نشان سبک ویژهٔ او را دارد. بیشترین توانایی ذهنی او در زمینه‌ای دور از انتظار بود: ارائهٔ فرمولهای بدیع وپیچیده. رامانوجان به تمام معنی یک "مرد فرمول" بود و گذشته از بزرگانی چون لئونهارت اویلر وژاکوب ژاکوبی، رقیبی نداشت. به‌گفتهٔ هاردی: "درهریک از فرمولهای رامانوجان همیشه بیش از آنچه در نگاه اول دیده می‌شود، می‌توان یافت".

اغلب قضایای رامانوجان دربارهٔ سریهای نامتناهی، انتگرالها و کسرهای مسلسل است. وی برخی از این قضیه‌ها را در نظریهٔ اعداد به کار گرفت. رامانوجان به نظریهٔ تحلیلی اعداد علاقهٔ خاصی داشت. در این مبحث، فرمولهای تقریبی برای کمیتهایی چون تعداد عددهای اول کوچکتر از حد مفروض یا میانگین تعداد مقسوم علیه‌های عدد مفروض جستجو می‌شود.

تماس او با هاردی روی کارهایی که در کیمبریج منتشر می‌کرد اثر گذاشت و این آثار به سبک رایج همگانی نزدیکتر است و اثباتها دقیقتر عرضه شده است. در مورد قضایایی که در یادداشتهایش ثبت شده، اوضاع کاملا به قرار دیگری است. از آنجا که تحقیقات ریاضیش بر پایهٔ خودآموزی بود، تصورش در مورد اثبات آن چنان که باید و شاید دقیق نبود. هرگاه ترکیبی از شواهد عددی و بحث صوری به نتیجهٔ قابل قبولی منجر می‌شد و قبلا حس می‌کرد جواب درست است، کار را تمام شده می‌دانست.

مزایای تحصیل نکردن

برای ریاضیدانان حرفه‌ای معمولا پی بردن به صورت احتمالی یک قضیه کافی است، اگرچه همین خود آغاز کار تخصصی و دقیق تهیهٔ اثبات کامل و صحیح آن است. روش رامانوجان در این مورد، بی‌آنکه نادرست باشد، اغلب شامل پرشهایی از چند شکاف بود. در واقع، قضیه‌هایش معمولا درست بودند ولی در اثبات آنها شکافهایی وجود داشت. گاه یک متخصص حرفه‌ای می‌توانست این شکافها را پر کند و گاهی استدلال دیگری جوابگو بود. گاهی هم، البته به ندرت، قضیه به کلی غلط بود.

بروس برنت شیوهٔ کار رامانوجان را چنین توصیف می‌کند:

"... اگر رامانوجان تحصیلات رسمی بیشتری داشت، قاعدتا نمی‌بایست به روشهای صوری ابتکاری خودش که بدانها دلبسته وحتی مبلغ آنها بود پایبند می‌شد... اگر مثل ریاضیدانان برخوردار از آموزش صحیح فکر می‌کرد، بی‌شک خیلی از فرمولهایی را که به نظر خودش اثبات کرده بود ولی در واقع اثبات نکرده بود، ثبت نمی‌کرد. اگر اوضاع بدین منوال بود، امروزه ریاضیات از آنچه هست فقیرتر می‌شد".

یک مثال مناسب، قضیه‌ای است که رامانوجان آن را فرمول *اساسی* خود نامید (پیوست ۲ را ببینید). خودش خیلی به این قضیه علاقه‌داشت و اغلب آن را به‌کار می‌بست. این فرمول اساسی، مقدار انتگرال $x^nF(x)$ را بین دو حد صفر و بی‌نهایت به ازای هر تابع F تعیین می‌کند. اثبات رامانوجان شامل چندین بار بسط سری، تغییر ترتیب جمع زنی، جابه‌جایی ترتیب جمع زنی و انتگرال گیری و غیره است. از آنجا که پای روندهای نامتناهی در میان است، هر مرحله در معرض خطاهای زیادی است. بزرگترین آنالیزدانها، قسمت اعظم قرن نوزدهم را صرف این کردند که دریابند چه وقتی این اعمال مجاز است. شرایطی که به نظر رامانوجان موجب صحت فرمول می‌شوند، شدیدا ناکافی‌اند، وهمان‌طور که هاردی ثابت کرد، برای برقراری این فرمول فرضهای خیلی قویتری لازم است.

درنتیجه، در بسیاری موارد که رامانوجان فرمول اساسیش را به کار می‌برد، برهانش از استحکام جدی برخوردار نیست. در واقع، گاهی فرمول اساسی به هیچ وجه صادق نیست. با این همه، در پایان کار تقریبا اغلب قضایای یافته

۲. فرمول اساسی رامانوجان

طبق این فرمول، تحت شرایط مناسب روی تابع F، اگر داشته باشیم: $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi(k)(-x)^k}{k!}$

آن‌گاه می‌توان نوشت: $\int_0^{\infty} x^{n-1}F(x)\,dx=\Gamma(n)\phi(-n)$

که در آن: $\Gamma(n)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$

که همان تابع گامای اویلر است که به ازای اعداد صحیح n با تابع فاکتوریل یکسان است $(n-1)! = (n-1)(n-2)...3.2.1.$

یکی از شگفتیهای این فرمول آن است که $\phi(n)$ فقط برای اعداد صحیح و مثبت n تعریف‌شده است، در حالی که در فرمول، جملهٔ $\phi(-n)$ ظاهر می‌شود. رامانوجان معتقد است که در اینجا نوعی تعمیم "طبیعی" $\phi(n)$ صورت می‌پذیرد که مقدار $\phi(n)$ را برای nهای منفی تعریف می‌کند و خود او هم اغلب این فرمول را برای nهای غیرصحیح به کار می‌برد.

وی اثبات این فرمول را با نمایش انتگرالی تابع گاما شروع می‌کند، تابع نمایی را به‌صورت سری تیلور بسط می‌دهد، ترتیب جمع‌زنی و انتگرال‌گیری را معکوس می‌کند، آن‌گاه ترتیب جمع زنی را وارونه می‌کند و سرانجام دوباره قضیهٔ تیلور را به کار می‌بندد.

شرایطی که رامانوجان ذکر می‌کند برای توجیه این مراحل عملیات غیرکافی است؛ از این رو اثباتی که برای فرمول اساسی خود می‌دهد شکافهایی دارد. برای پر کردن این شکافها شرطهای خیلی قویتری باید اعمال شود. اما در آن صورت دیگر نمی‌توان فرمول را به گونه‌ای که مورد نظر رامانوجان بود به کار گرفت.

با وجود این اشکالهای منطقی، رامانوجان تقریبا همیشه با استفاده از این فرمول به قضایای درست می‌رسد.

شده توسط رامانوجان، صحیح‌اند!

بخشی از جالبترین کارهای او مربوط است به نظریهٔ اِفرازها که شاخه‌ای از نظریهٔ اعداد است. در اینجا با داشتن یک عدد صحیح می‌خواهیم بدانیم به چند صورت می‌توان آن را *افراز* کرد، یعنی به صورت مجموع اعداد صحیح کوچکتر نوشت (پیوست ۳ را ببینید). *تابع افراز* $p(n)$ طبق تعریف عبارت است از تعداد راههای ممکن برای افراز عدد مفروض n.

اعداد $p(n)$ با افزایش n سریعا زیاد می‌شوند. مثلا p (۲۰۰) برابر است با عدد حیرت‌انگیز ۳۹۷۲۹۹۹۰۲۹۳۸۸. برای $p(n)$ هیچ فرمول ساده‌ای وجود ندارد، ولی دست‌کم می‌توان به جستجوی فرمول تقریبی پرداخت که مرتبهٔ کلی اندازهٔ $p(n)$ را مشخص کند[۱]

نمونه‌ای از قضایای مربوط به نظریه تحلیلی اعداد، قضیه اعداد اول است. طبق این قضیه، تعداد عددهای اول کوچکتر از x تقریبا برابر است با $x/\log x$. مقدارخطا نسبتا کم است ولی بازیاد شدن x به میزان دلخواه زیاد می‌شود.

۱. $p(n)$ را می‌توان توسط دنبالهٔ برگشتی زیر بیان کرد که البته فرمول صریحی نیست و افراز n را بر حسب افراز اعداد صحیح کوچکتر از n می‌دهد:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-v)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+(-1)^{i+1}\left\{p\left[n-\frac{i(3i-1)}{2}\right]+p\left[n-\frac{i(3i+1)}{2}\right]\right\}+\ldots\ldots$$

در این فرمول طبق تعریف $p(0)=1$ و برای nهای منفی مقدار $p(n)$ صفر است. ــ م.

۳. تابعهای اِفراز

تابع افراز $p(n)$ از n، تعداد راههای متمایز ممکن، برای نوشتن n به صورت مجموع اعداد کوچکتر (یا مساوی) n است. مثلا ۵ مربع □□□□□ را به صورتهای زیر می‌توان گروهبندی کرد:

□□□□□	5
□□□□+□	4+1
□□□+□□	3+2
□□□+□+□	3+1+1
□□+□□+□	2+2+1
□□+□+□+□	2+1+1+1
□+□+□+□+□	1+1+1+1+1

که مجموعا هفت افراز متمایز دارد، پس $p(5)=7$. جدول مختصری برای $p(n)$ در زیر می‌آید:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

برای مقادیر بزرگتر n مقدار $p(n)$ سریعا افزایش می‌یابد.

n	50	100	150	200
$p(n)$	204226	190569292	40853235313	3972999029388

با این حال تقریب خوبی است، زیرا حد نسبت مقدار تقریبی به‌مقدار واقعی، وقتی x به سوی بی‌نهایت میل کند ۱ است. به عبارت دیگر، این یک فرمول **مجانبی** است.

مسئلهٔ یافتن فرمول مجانبی برای تابع افراز نیز ماهیتا به نظریهٔ تحلیلی اعداد مربوط می‌شود. تعریف تابع افراز به‌خاطر برخی‌جزئیات تکنیکی، کار ساده‌ای نیست. در سال ۱۹۱۸ هاردی و رامانوجان درصدد برآمدند بر این دشواریهای تکنیکی غلبه‌کنند و فرمولی نیز به دست آوردند.

نتیجهٔ به دست آمده، یک سری نسبتا پیچیده شامل ریشه بیست و چهارم واحد بود. نخستین جملهٔ سری تقریب اولیه را به دست می‌دهد. از این جمله به ازای ۲۰۰= n مقدار ۳۹۷۲۹۹۸۹۹۳۱۸۵/۸۹۶ حاصل می‌شود که تا شش رقم با معنی اولیه (یعنی تا شش رقم از سمت چپ) با مقدار واقعی تطابق دارد. بعدا متوجه شدند که باافزودن هفت جملهٔ بعدی این سری مقدار ۳۹۷۲۹۹۹۰۲۹۳۸۸/۰۰۴ به‌دست می‌آید. به نظرشان رسید که این نتیجه قویا حاکی از آن است که می‌توان فرمولی برای $p(n)$ به دست آورد که نه تنها مرتبهٔ بزرگی و ساختار آن را نشان‌دهد، بلکه بتواند برای محاسبهٔ مقدار دقیق آن به ازای هر n نیز به کار رود". به‌این ترتیب کار خود را در جهت تهیهٔ دقیق‌آن‌دنبال کردند. این یکی از موارد بسیار نادری است که در آن، جستجوی فرمولی تقریبی، به کشف فرمول دقیق منتهی شده است[۲].

رامانوجان در تعداد افرازها نیزخواص‌جالبی کشف کرد. درسال ۱۹۱۹ ثابت‌کرد که‌به ازای‌هر

۲. یک فرمول مجانبی نسبتا ساده برای تابع افراز به صورت $p(n)=\frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$ است. بر این اساس، مقدار مجانبی $p(n)$ بزرگتر است از هر تابع چند جمله‌ای بر حسب n و نهایتا کوچکتر است از a^n به ازای هر $a>1$. ــ م.

عدد صحیح k، عدد $p(5k+4)$ همیشه بر ۵ بخش پذیر است و $p(7k+5)$ همیشه بر ۷ بخش پذیر است. مثلا به ازای $k=2$ داریم $5k+4=14$ و $7k+5=19$. آن‌گاه $p(14)=135$ که مضربی از ۵ است و $p(19)=490$ که مضربی از ۷ است.

درسال ۱۹۲۰ وی قضایای مشابهی عرضه کرد: مثلا اینکه $p(11k+6)$ همیشه بر ۱۱ بخش پذیر است؛ $(25k+24)$ بر ۲۵ بخش‌پذیر است؛ همچنین اینکه $p(49k+19)$، $p(49k+33)$، $p(49k+40)$ و $p(49k+47)$ همگی بر ۴۹ بخش پذیرند؛ و $p(121k+116)$ بر ۱۲۱ بخش پذیر است. توجه کنید که $49=7^2, 25=5^2$ و $121=11^2$. رامانوجان قضیهٔ کلیتری را نیز در قالب حدس بیان کرد. به این صورت که به نظر وی فرمولهایی از این نوع تنها برای مقسوم علیه‌هایی به صورت $5^a7^b11^c$ وجود دارد.

این مجموعهٔ قضایا ویژگیهای غریبی دارند. در تعریف $p(n)$ یا در فرمولهای متعارف موجود برای آن، هیچ چیزی که توجیه کنندهٔ نقش خاصی برای سه عدد اول ۵، ۷ و ۱۱ باشد وجود ندارد. در مورد اثبات این قضایا همین قدر می‌توان‌گفت که بسیار پیچیده و گیج کننده‌اند. رامانوجان همهٔ حدسهای خود را ثابت نکرد ولی همانهایی که توسط وی اثبات شد، منجر به پیدایش فرمولهای زیبایی در ریاضیات ترکیباتی گردید. مثلا فرمول زیر:

$$p(4)+p(9)x+p(14)x^2+\dots$$

$$\frac{5\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\dots\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\}^6}$$

که از روی آن می‌توان بلافاصله قضیهٔ مربوط به $p(5k+4)$ را استنباط کرد، زیرا طرف راست تساوی به وضوح مضرب ۵ است، پس هر یک از ضرایب سمت چپ‌هم باید مضرب ۵ باشد.

تعدادی از قضایای رامانوجان تاکنون اثبات نشده مانده‌اند. یکی از آنها که طی دههٔ اخیر سرانجام به‌اثبات تن داد، اهمیت خاصی دارد. رامانوجان طی رساله‌ای، در سال ۱۹۱۶ به‌بررسی توابع حسابی گوناگون پرداخت، از جمله تابع $\tau(n)$ که طبق تعریف عبارت است از ضریب x^{n-1} در بسط $\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\}^{24}$. بنابراین $\tau(1)=1$، $\tau(2)=-24$، $\tau(3)=252$ الی آخر. در اینجا به توضیح کم و کیف اهمیت این فرمول نمی‌پردازیم و همین‌قدر اشاره می‌کنیم که ریشهٔ بحث به کار ژرف و زیبایی برمی‌گردد که در سدهٔ نوزدهم روی تابعهایی موسوم به توابع بیضوی انجام شده است.

رامانوجان روی این مسئله کار می‌کرد که: با فرض آنکه $\sigma_s(n)$ مجموع توانهای s ام مقسوم علیه‌های n باشد، مطلوب است تعیین فرمولی برای تقریب

$$\sigma_r(0)\sigma_s(n)+\sigma_r(1)\sigma_s(n-1)+\dots+\sigma_r(n)\sigma_s(0).$$

رامانوجان برای بیان قضایایش به تابع τ نیاز داشت و همچنین باید می‌دانست که میزان بزرگی آن چقدر است. وی ثابت کرد که مرتبهٔ اندازهٔ آن بیشتر از n^7 نیست ولی حدس زد که $n^{11/2}$ هم کافی باشد. همچنین، فرمولهای مختلفی را در این زمینه بیان کرد، از جمله دو فرمول زیر:

اگر m و n هیچ عامل مشترکی نداشته باشند:

$$\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$$

اگر p عدد اول باشد:

$$\tau(p^{n+1})=\tau(p)\tau(p^n)-p^{11}\tau(p^{n-1})$$

لئوموردل، ریاضیدان انگلیسی در سال ۱۹۱۹ این دو فرمول را ثابت کرد. این فرمولها کار محاسبهٔ $\tau(n)$ را برای هر n آسان می‌کنند. نظرات او موجب پیدایش مباحث مهمی در هندسهٔ جبری نوین شد. اما همهٔ تلاشهای او برای اثبات **حدس رامانوجان** در مورد مرتبهٔ بزرگی $\tau(n)$ بی‌نتیجه ماند.

حدس مظلوم

درسال ۱۹۴۷ یکی از متخصصان نظریهٔ اعداد به نام آندره ویل در شیکاگو سرگرم جستجو دربرخی قضایای بسیار قدیمی کارل فریدریش گاوس بود. او در نظر داشت این قضیه‌ها را در بررسی جوابهای صحیح معادلات گوناگون به کار گیرد. ویل با اتکا بر دریافتهای شخصی و با استفاده ازمشابهت غریبی با توپولوژی، یک سری قضایای نسبتا تخصصی بیان کرد که **حدسهای ویل** خوانده می‌شوند. این حدسها به زودی در هندسهٔ جبری نقش بنیادی یافتند. در سال ۱۹۷۴ ریاضیدانی بلژیکی به نام پی‌یر دلین، به عنوان یک قدرت نمایی در هندسهٔ جبری، حدسهای ویل را اثبات کرد. یک سال بعد او و ایهارا این قضیه‌ها را برای اثبات حدس رامانوجان نیز به کار گرفتند. این‌امر نشان دهندهٔ قدرت شگرف الهام درونی در رامانوجان است، چرا که حدس به ظاهر مظلوم وی مستلزم این همه تلاش و رفع چنین موانعی بود تا به اثبات تن در دهد.

از آنجا که شیوهٔ کار رامانوجان تا این حد غیرمعمول بود و او بدون هیچ‌گونه تحصیلات رسمی، از روشهای غیر دقیق به نتایج درستی دست می‌یافت، بسیاری بر آن بوده‌اند که عنصر ویژه‌ای در الگوهای تفکر او دخالت داشته است. می‌گویند خود رامانوجان ابراز داشته بود که این مطالب را *الههٔ ناماگیری* در خواب به وی می‌گفته است. البته، ممکن است این حرف را صرفا به خاطر پرهیز از بحثهای بیمورد زده باشد. چنان که همسرش بعدها نیز گفته بود که او "هرگز فرصتی نداشت که به معبد برود زیرا فکرش دایما با ریاضیات مشغول بود". هاردی می‌نویسد: که به نظر وی "همهٔ ریاضیدانها در نهایت به یک‌شیوه می‌اندیشند و رامانوجان هم از این امر مستثنا نیست." ولی می‌افزاید: "وی آمیزه‌ای از قدرت تعمیم، درک‌عمیق و روابط و ظرفیت اصلاح سریع فرضها را درخود داشت. به طوری که گاه به‌راستی تکان دهنده بود".

رامانوجان بزرگترین یا پرکارترین ریاضیدان عصر خود نبود، اما شهرتش صرفا ناشی از توجه به سرگذشت غیرعادی یا همدردی به خاطر فقر جانگداز وی نبوده است. نظرات او در زمان حیاتش بسیار اهمیت یافته بود و با گذشت سالها همچنان اهمیت بیشتری می‌یابد. بروس برنت معتقد است که کار رامانوجان نه تنها کهنه نبود، بلکه از عصر خودش هم جلوتر بود. معمولا درک این مطلب که رامانوجان چگونه به فلان فرمولش دست یافته، بسیار دشوارتر از اثبات همان‌فرمول است. با این حال اگر بتوانیم به روند شکل‌گیری آن در ذهن وی پی ببریم، به اصول کلی تازه‌ای خواهیم رسید. در حال حاضر، آرام آرام ارزش بسیاری از ژرفترین اندیشه‌های رامانوجان بر ما مکشوف می‌شود. در پایان، رشتهٔ سخن را به هاردی می‌سپاریم:

"یک موهبت (در آثار ریاضی او) وجود دارد که قابل انکار نیست: هویت اصیل و سلطه ناپذیر. شاید اگر در روزگار جوانی از اندکی پرورش بهره می‌گرفت، ریاضیدان بزرگتری می‌شد و مطالب بدیعتر و مهمتری کشف می‌کرد. از سوی دیگر، شاید در این صورت او بیش از آنکه رامانوجان باشد، یک استاد اروپایی از آب درمی‌آمد و ای بسا که در این میان بیش‌از آنکه چیزی به دست آید، چیزی از دست می‌رفت.

دانشمند

در بارهٔ نویسندهٔ مقاله:

یان استوارت، هم‌اکنون در انستیوی ریاضیات دانشگاه وارویک (انگلستان) کار می‌کند. وی یکی از نویسندگان مقالهٔ "مسئلهٔ حیرت‌انگیز هانری پوانکاره" است که در شمارهٔ دی ماه ۱۳۶۵ *دانشمند* چاپ شده است. کتابی از وی به نام مفاهیم *ریاضیات* جدید به‌ترجمه جمشید پرویزی در سال ۱۳۶۳ توسط انتشارات خوارزمی انتشار یافته است. یان استوارت، علاوه بر مقاله‌ها و کتابهای متعدد تخصصی، دانشگاهی و عامه فهم ریاضی، دو کتاب هم برای کودکان نوشته است.

New Scientist, 17 Dec. 1987.