بازیچهٔ ریاضیدانان، ایوارز پترسون، دانشمند، سال ۲۵، شمارهٔ ۵ مرداد ۱۳۶۶، ص ۲۸-۳۳.

بازیچهٔ ریاضیدانان

نوشتهٔ ایوارز پترسون ـــ ترجمهٔ محمد باقری

لابد معمای آن دوره‌گرد را شنیده‌اید که با یک گرگ و یک بز و سبدی کلم به‌کنار رودخانه‌ای می‌رسد و در آنجا قایقی می‌یابد که علاوه بر خود او فقط گنجایش یک‌چیز دیگر را دارد. طبعا او نمی‌تواند گرگ را با بز، یا بز را با کلم تنها بگذارد. دوره‌گرد چطور می‌تواند داراییش را سالم از رودخانه بگذراند؟

این معمای مشهور قرنها بر سر زبانها بوده است. در روایت دیگری از این معما که در قرن سیزدهم ابداع شد، سه مرد جوان و سه زن که همسران آنها هستند، مطرح می‌شوند. برای گذشتن از رودخانه فقط یک قایق دونفره وجود دارد. اگر بخواهیم هیچ گاه زن و مرد غریبه‌ای با هم تنها نمانند، چند بار باید از قایق استفاده شود؟

هر دو معمای فوق و بسیاری از این گونه معماها، مسائل ریاضی نسبتا ساده‌ای هستند که در این قالب ریخته می‌شوند. از عهد مصریان و بابلیان قدیم از این شیوه‌ها استفاده می‌شد تا تمرینهای معمولی ریاضی را به صورتی گیرا و کنجکاوی برانگیز درآورند.

امروزه نیز معماها و بازیهای ریاضی طرفداران زیادی دارد. همه‌ساله صدها کتاب برای فرونشاندن عطش معما دوستان در سراسر جهان منتشر می‌شود. بسیاری از مجله‌ها ستون مخصوص معما دارند. به‌علاوه گاهی پیدایش یک معمای تازه و جالب، شیفتگانش را سخت به کوشش وامی‌دارد. مثلا، طی سه سال، فروش مکعبهای روبیک از مرز ۱۰۰ میلیون گذشت.

به گفتهٔ یکی از ریاضیدانان معاصر به نام د. سینگماستر، سرگرمی یکی از قویترین نیروهای برانگیزانندهٔ بشر است. مسئله‌های تفننی، منجر به پیدایش بسیاری از مباحث ریاضی شده‌اند. مثلا منشا نظریهٔ احتمالات، مسائلی است که در قمار مطرح شده است.

وی می‌افزاید هر مسئلهٔ جالب ارزش آن را دارد که موضوع ساعتها تدریس باشد. در ریاضیات تفریحی مسائل متنوعی مطرح می‌شود که نسلهایی از شاگردان را مجذوب کرده است و در آینده نیز خواهد کرد.

سینگماستر یکی از صدتن ریاضیدان حرفه‌ای و آماتوری بود که اخیرا هفتهٔ دلپذیری را در یک کنفرانس دربارهٔ ریاضیات تفریحی و ذهنی در دانشگاه "کلگری" واقع درآلبرتا(ایالتی در غرب کانادا) گذراندند. (بخشی از معماهای مطرح شده در این کنفرانس در "استدلالهای معمایی" **دانشمند**، شماره ۱۲ سال ۱۳۶۵، ص۴۵، چاپ شد).

در این گردهمایی، کارجای خود را به بازی و بازی جای خود را به کار داده بود. سخنرانیها با انواع ظرافتها همراه بود. با هر حرکت قلم یا مداد، معمای تازه‌ای پدید می‌آمد یا برای معمایی کهنه جواب تازه‌ای یافته می‌شد. شرکت کنندگان با اعداد، مربعهای کوچک، قطعات چوبی، پولک(ژتون)، چوب کبریت، سکه، کارت و حلقه‌های سیمی در هم پیچیده کلنجار می‌رفتند.

حتی سروکلهٔ کلوچه‌ها هم دریک بازی هیجان‌انگیز پیدا شده بود. جیمز پروپ، مبتکر این بازی، که ریاضیدانی از دانشگاه برکلی کالیفرنیاست، بازی را چنین شرح می‌دهد: دو کودک را در نظر بگیرید که به نوبت از یک گنجه کلوچه می‌دزدند، به‌طوری که هر کدام یک روز در میان یک کلوچه برمی‌دارد. بعضی از کلوچه‌ها در اثر ماندن در گنجه خراب می‌شوند. خوشبختانه تاریخ انقضای مصرف هر کلوچه روی لفاف آن نوشته

شده است. با رسیدن آن روز، بچه‌ها دیگر آن کلوچه را نمی‌خورند.

پروپ می‌گوید: هر کدام از این بچه‌های موذی فکر و ذکرش این است که آخرین کلوچه را نصیب خود کند. اگر هیچ کلوچه‌ای ضمن بازی خراب نمی‌شد، این بازی دیگر لطفی نداشت. در این صورت، اینکه چه کسی برنده می‌شود، به زوج یا فرد بودن تعداد کلوچه‌ها بستگی دارد. اما وقتی بعضی از کلوچه‌ها خراب می‌شوند، نتیجهٔ بازی را نمی‌توان به این آسانی پیش‌بینی کرد.

پروپ این بازی را به برادر خود یاد داد و بزودی در بازی با او مغلوب شد. وی گفته است: "او به طور تصادفی بازی می‌کرد و مرا شکست داد." اکنون پروپ می‌کوشد تا بازی را تحلیل کند و ببیند آیا استراتژیهایی وجود دارد که بُرد را حتمی کند.

در تحلیل او، هر کلوچه به توسط ستونی از پولکها نمایش داده می‌شود که ارتفاع هر ستون برابر است با تعداد روزهای باقی مانده از عمر کلوچه. در هر نوبت، بازیکن یک ستون را برمی‌دارد و از هر ستون دیگر هم یک پولک برداشته می‌شود. بازیکنی که آخرین ستون را برمی‌دارد برنده است.

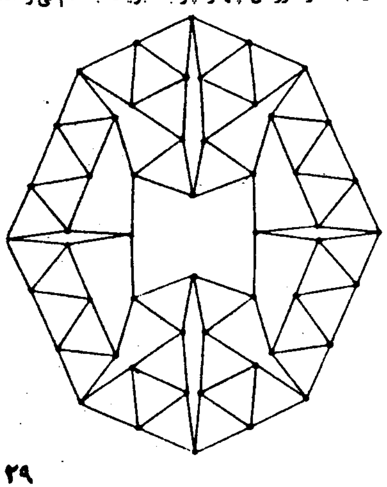
با آنکه پروپ الگوهای جالبی یافته است که برای برخی مجموعه‌های پولک قابل استفاده است ولی هنوز نتوانسته است یک استراتژی کلی برای هر گروه اولیه از کلوچه‌ها بیابد. خودش می‌گوید "اطلاعاتی که دارم بیشتر از کافی است ولی آنچه کم دارم حدس است."

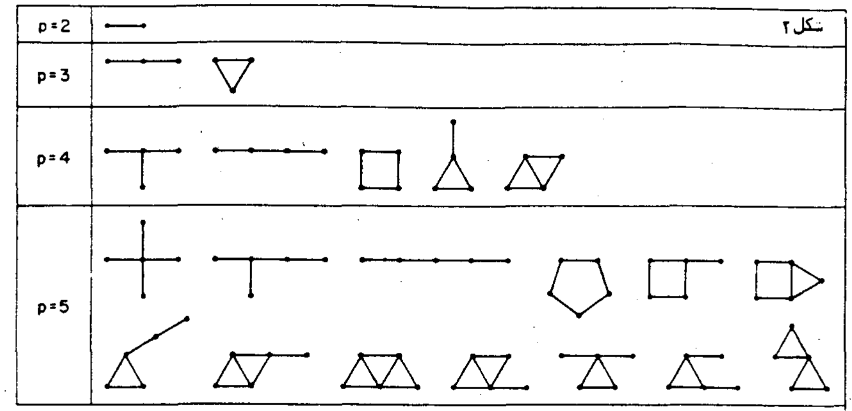
یک ریاضیدان دیگر که در بازی با کبریت تخصص دارد می‌گوید، "چوب کبریت ارزانترین و ساده‌ترین چیز برای معماهاست و کتابهایی دربست به معماهای چوب کبریتی اختصاص یافته‌اند." در جریان گردهمایی، برای آنکه حاضران بیکار نمانند، هرکس که ترجیح می‌داد به جای گوش دادن به سخنرانی او روی معمایی کار کند، چند قوطی کبریت داد.

یک گروه از مسائل مربوط به چوب کبریت (یا خلال دندان) با ساختن شکلهای هندسی مسطحی سروکار دارد که در هر نقطه از آنها تعداد معینی چوب کبریت (بی‌آنکه یکدیگر را قطع کنند) به هم می‌رسند. مثلا در شکلی که با سه چوب کبریت به صورت مثلث متساوی الاضلاع ساخته‌شود، در هر گوشه‌دو چوب کبریت به هم می‌رسند. این کمترین تعداد چوب کبریتهایی است که می‌توان با آنها شکلی ساخت که در هر راس دو چوب کبریت به هم برسند.

اگر قرار باشد سه چوب کبریت در هر گوشه به هم برسند، مسئله دشوارتر می‌شود. جواب این حالت شکلی است حداقل متشکل از ۱۲ چوب کبریت که سه‌تاسه‌تا در هشت راس به هم می‌رسند. آیا شما می‌توانید این‌شکل را پیدا کنید؟ برای حالتی که در هر راس چهار چوب کبریت به هم می‌رسند جواب نهایی یافته نشده است. تا اینجا، شکلی با ۱۰۴ چوب کبریت که در ۵۲ نقطه به هم می‌رسند به دست آمده است، ولی معلوم نیست این کوچکترین شکلی باشد که در شرط مذکور صدق می‌کند. اما معلوم شده است که هیچ شکلی وجود ندارد که در آن تعداد چوب کبریتهای منتهی به هر راس پنج یا بیشتر باشد.

شکل ۱. در هرراس چهار چوب کبریت به هم می رسند.





تنها به یک طریق می‌توان دو نقطه را با چوب کبریتی به هم وصل کرد. این تعداد برای اتصال سه نقطه دو، و برای چهار نقطه پنج است. با افزایش تعداد نقاط، تعداد شکلهای چوب کبریتی سریعا زیاد می‌شود. آیا می‌توانید ۵۰ شکل مربوط به اتصال شش نقطه را پیدا کنید؟

بازیهای چوب کبریتی مسائلی را پیش می‌آورند که در شاخه‌ای از ریاضیات به‌نام نظریهٔ نگاره‌ها (گرافها) مطرح می‌شود. این نظریه راههای ممکن برای وصل کردن نقاط به یکدیگر را بررسی می‌کند. این‌گونه نگاره‌ها غالبا در طراحی مدارها و شبکه‌ها نقش‌مهمی ایفا می‌کنند.

با استفاده از چوب کبریت انواع‌خاصی از نگاره‌ها مطرح می‌شود. مثلا، فقط به یک طریق می‌توان دو نقطه را به وسیلهٔ چوب کبریتی به هم وصل کرد. به دو طریق می‌توان سه نقطه را با دو یا سه چوب کبریت به هم وصل کرد که این نقاط روی یک خط راست یا بر راسهای یک مثلث واقع باشند. برای اتصال چهار نقطه پنج آرایش مختلف از چوب کبریتها به دست می‌آید، برای اتصال پنج نقطه ۱۳ آرایش و برای شش نقطه ۵۰ آرایش (شکل ۲ را ببینید). ولی فرمولی کلی برای تعیین تعداد آرایشهای ممکن به‌ازای هر تعداد نقطه مفروض پیدا نشده است.

این‌گونه مسائل حل نشده در این زمینه فراوان‌اند.

مربعهای جادویی (سِحری) هزاران سال افراد را مجذوب ساخته‌اند. در این مربعها مجموعه‌ای از اعداد صحیح با نظم خاصی چیده می‌شوند، به‌طوری که مجموع اعداد در هر سطر، در هر ستون و در طول هر قطر یکسان است. برای بعضی مربعهای جادویی خاصیتهای ویژه‌ای تصور می‌شد. مثلا در چین باستان، مربع سه‌درسه‌ای را که همهٔ ارقام یک تا نه در آن چیده شود، خوش‌یمن می‌دانستند.

اخیرا دانشمندان موفق شدند سنگنوشته‌ای از قرن پنجم میلادی را که با الفبای رون[1] نوشته شده است بخوانند و همین امر موجب کشف نوع تازه‌ای مربع جادویی شد. ماجرا با کتاب کمیابی از قرن نوزدهم به نام "منشا پرستش درخت" شروع شد. این کتاب اعمال کاهنان قدیم سلت[2] را شرح می‌دهد وحاوی

۱. الفبایی که اقوام ژرمنی از نوع خط تحریری یونانی اقتباس کردند و برای کندن کتیبه برروی چوب به کار می‌بردند. احتمالا نخست گوتهای شرقی در حدود سال ۳۰۰ پس از میلاد آن را به کار بردند. این الفبا را پس از قرون وسطی نیز در انگلستان و اسکاندیناوی به کار برده‌اند.

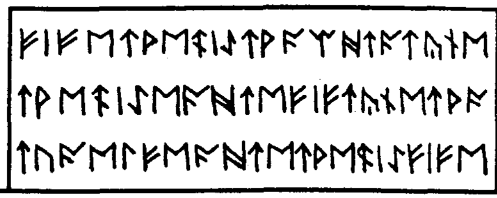
۲. سلتها یا کلتها اقوامی بودند که در هزارهٔ دوم پیش از میلاد در جنوب غربی آلمان و شمال فرانسهٔ کنونی می‌زیسته‌اند. بعدها آنان نیز با دیگر اقوام اروپایی درآمیختند و امروزه اصطلاح سلتی به ساکنان مناطقی اطلاق می‌شود که سابقا زبان سلتی در آنجا رایج بوده است (ایرلند، اسکاتلند و غیره).

یک‌طلسم با الفبای رون است که تصور می‌شد دارای خواص جادویی باشد. سرانجام این طلسم به زبان انگلیسی امروزی ترجمه شد.

پس از ترجمه، معلوم شد که این طلسم در واقع یک مربع جادویی سه‌درسه است. اما این مربع خاصیت خیلی جالب دیگری هم دارد. وقتی تعداد حروف رون را که در نوشتن هر عدد از مربع جادویی اصلی به کار رفته است در محل مربوطه بنویسیم، اعداد جدید نیز یک مربع جادویی می‌سازند! به‌علاوه، این مربع جادویی دوم شامل اعداد متوالی از سه تا یازده است. عجیب اینکه با باز گرداندن کلمات به انگلیسی امروزی، همین خاصیت حفظ می‌شود (شکل ۲ را ببینید). این کشف شگفتی دانشمندان را برانگیخته است.

این موضوع باعث شد که عده‌ای نه تنها در انگلیسی بلکه در بسیاری زبانهای دیگر نیز به جستجوی نمونه‌هایی با همین خاصیت بپردازند. ریاضیدانی به‌نام سوالوز (از هلند) که در کشف فوق سهیم بوده، دریافته است که برای حالتی که مجموع سطرها، ستونها و قطرها کمتر از ۲۰۰ باشد، در زبان فرانسه تنها یک مربع جادویی از این نوع وجود دارد، درحالی که در انگلیسی این تعداد بیش از هفت و در زبان ویلزی (رایج در ناحیهٔ ویلز انگلستان) از ۲۶ بیشتر است. برای مجموعهای کمتر از ۱۰۰ در زبان دانمارکی چنین مربعی وجود ندارد و تعداد آنها در هلندی شش، در فنلاندی سیزده و در آلمانی عدد باور نکردنی ۲۲۱ است. سوالوز مربع سه‌درسه‌ای

رمزگشایی این کتیبهٔ متعلق به قرن پنجم میلادی که با الفبای رون نوشته شده است منجر به کشف گروه جدیدی از مربعهای جادویی شد. این کتیبه شامل یک دسته اعداد است که در یک مربع سه‌درسه جا می‌گیرند. مجموع اعداد در هر سطر، ستون یا قطر مقداری ثابت (۴۵) است. جالب این است که اگر به جای عدد موجود در هر خانه، تعداد حروف کلمهٔ مربوط به آن عدد را بنویسیم، مربع جادویی جدیدی به دست می‌آید که در آن همهٔ اعداد از سه تا یازده به کار رفته‌اند. این خاصیت هم در زبان اصلی سنگنوشته و هم در انگلیسی برقرار است. در ردیف دوم مربعهای جادویی نویافته‌ای دیده می‌شوند که در آنها دو بار به جای هر عدد تعداد حروف کلمهٔ آن عدد گذاشته شده و بدین ترتیب سه مربع جادویی مرتبط به دست آمده‌اند (که البته فقط در زبان انگلیسی این خاصیت را دارند).



5	22	18
28	15	2
12	8	25

→

five	twenty-two	eighteen
twenty-eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty-five

→

4	9	8
11	7	3
6	5	10

44	61	57
67	54	41
51	47	64

→

9	8	10
10	9	8
8	10	9

→

4	5	3
3	4	5
5	3	4

شکل ۳

در زبان انگلیسی یافته است که می‌توان از آن مربعی جادویی به دست آورد که به نوبهٔ خود مربع جادویی دیگری پدید می‌آورد (شکل ۲).

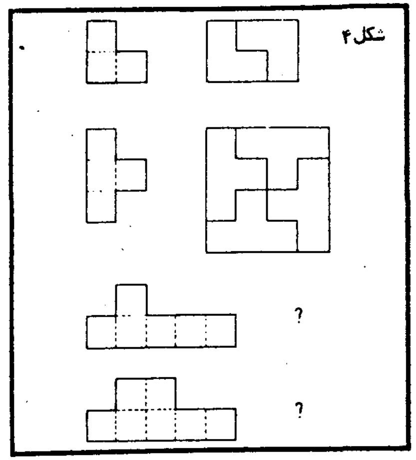
فعلا کار جستجو به مربعهای جادویی چهار در چهار و پنج در پنج کشیده است که تنها در زبان مورد نظر این خاصیت را دارند. سوالوز این جستجوی خود را "کاوشی برای یافتن طلسمهای جادویی هرچه موثرتر" توصیف می‌کند.

مسائل مربوط به کاشیکاری هم سابقه‌ای طولانی دارند. هنرمردمی بسیاری از فرهنگها نشان می‌دهد که بسیاری از این مسائل به شیوهٔ ماهرانه‌ای حل شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان از الگوهای تودرتو و پیچیدهٔ کاشیکاری اسلامی در قصرهایی چون "الحمرا" (اسپانیا) و همچنین از آثار "م. اِشِر" هنرمند معاصر هلندی نام برد. با این حال هنوز تعداد زیادی از مسائل کاشیکاری بدون پاسخ مانده‌اند.

یکی از این مسائل عبارت است از ساختن مستطیل با استفاده از قطعاتی که یک شکل خاص دارند (شکل ۴ را ببینید). حل مسئله با استفاده از قطعات مربع یا مستطیل آسان است. اما همین کار در مورد قطعه‌ای متشکل از شش مربع به هم پیوسته که پنج تای آنها در یک ردیف‌اند و ششمی به دومین مربع این ردیف چسبیده، خیلی دشوارتر است. در واقع هنوز کسی نتوانسته است ثابت کند که آیا ساختن یک مستطیل با استفاده از کاشیهایی به این شکل امکانپذیر است یا نه.

یکی از ریاضیدانان می‌گوید اگر کسی بتواند یکی از دو حالت امکانپذیری یا امکان‌ناپذیری فوق را ثابت کند، شایستهٔ جایزهٔ ارزنده‌ای است. این نکته هم هنوز روشن نشده است که آیا می‌توان با کاشی متشکل از هفت مربع مستطیلی ساخت یا نه.

یک مسئلهٔ دیگر در این زمینه، مربوط است به بلورنماها (شبه کریستالها) که به تازگی کشف شده‌اند و دارای شبکه‌های بلوری غیر متناوبی هستند. سالها پیش "راجر پن‌رُز"



یک دسته از مسائل کاشیکاری مربوط است به اینکه آیا می‌توان با کنار هم چیدن تعداد دلخواهی از کاشیهای به شکل مفروض مستطیلی ساخت؟ این آرایشهای مستطیلی برای بسیاری از شکلهای کاشی یافته شده‌اند ولی برای دو نوع قطعه‌ای که در شکل می‌بینید، هنوز مسئله حل نشده است. در عین حال کسی هم نتوانسته است ثابت کند که این کار ناممکن است.

فیزیکدانی از دانشگاه اکسفورد انگلستان یک الگوی کاشیکاری متشکل از قطعات لوزی‌شکل کشف کرد که بعضی از آنها پهن و بعضی باریک بودند و وقتی کنار هم چیده می‌شدند، الگویی پدید می‌آوردند که در فاصله‌های منظم عینا تکرار نمی‌شد.

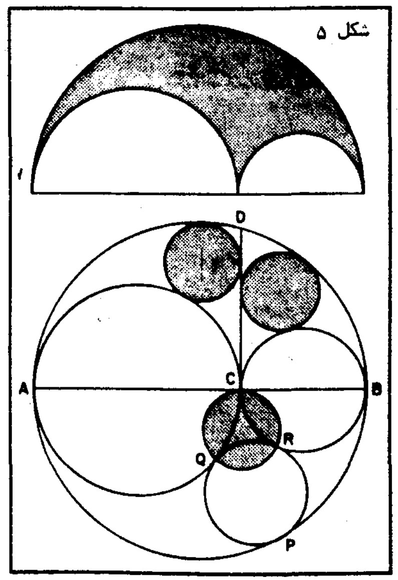
این مسئله همچنان مطرح است که آیا می‌توان الگوی کاشیکاری غیرتناوبی مشابهی یافت که در آن به جای دو نوع قطعهٔ مختلف که در اکثر نمونه‌ها دیده می‌شود، فقط یک نوع قطعه به کار رفته باشد.

سرگرمیهای دیگر هندسی که در گردهمایی مطرح شد، عبارت بود از هنر کاغذ وتا (اُریگامی) برای ساختن شکلهای هندسی سه بعدی. یکی از ریاضیدانها شیوه‌هایی برای ساختن شکلهای پیچیدهٔ ستاره مانند از کاغذ و بدون استفاده از قیچی یا ابزارهای مکانیکی دیگر عرضه کرد. این مدلها از واحدهایی

تشکیل شده‌اند که به طور ماهرانه بدون چسب به یکدیگر وصل می‌شوند. نحوهٔ اتصال این قطعات راهنمای خوبی است برای بررسی هندسی قطعات مشابهی که در اتصال با هم یک مکعب می‌سازند.

یک دندانساز از لوس‌آنجلس به نام لئون بانکوف که ریاضیدان آماتور است، حاصل سالها کار خود را در زمینهٔ یافتن خواص هندسی "شگفت‌آور" شکلی موسوم به "آربلوس" یا "چاقوی کفاشی" عرضه کرد (شکل ۵ را ببینید). این شکل هندسی که نخستین‌بار به توسط ارسیدس توصیف شد و یونانیان قدیم آن را "آربلوس" می‌نامیدند، طی قرنها منشا کشفیات عجیب و غیرمنتظره بوده است.

"چاقوی کفاشی" یا "آربلوس" (که در شکل بالایی با زمینهٔ نقطه‌نقطه آمده است) نخستین بار قرنها پیش، به توسط ارشمیدس توصیف شد و دارای خواص هندسی فوق‌العاده زیادی است که خیلی از آنها سالها پوشیده مانده بود. مثلا یک ریاضیدان آماتور به نام لئون‌بانکوف دایرهٔ سومی (*CQR*) را کشف کرده است که با دایره‌های دوقلوی نشان داده شده در دو طرف خط *DC* برابر است. این دایره‌های دوقلو را از خیلی پیش کشف کرده بودند.



نکتهٔ مهمی که در این گردهمایی روشن شد این بود که غیر ریاضیدانها هم می‌توانند در پژوهش ریاضی شرکت و همکاری داشته باشند. همهٔ پژوهشهای ریاضی با علامتهای مرموز و معلق بازیهای خسته کنندهٔ ذهنی همراه نیست.

ریاضیات تفریحی چیزی است که برای بسیاری از مردم قابل هضم است. در اینجا ابزار کار ساده است و معمولا از مداد و کاغذ تجاوز نمی‌کند. آنچه در این میان لازم است، شکیبایی داشتن و از کوره در نرفتن است. شرکت کنندگان در گردهمایی در این مورد اتفاق نظر داشتند.

ولی حواستان جمع باشد. وقتی کسی با یک معما درگیر شد باید از حوصله و وقتش برای آن مایه بگذارد. یکی از شرکت کنندگان در گردهمایی می‌گوید که یکی از مسائلی که اخیرا با آن مشغول بوده، سه ماه وقتش را گرفته است. پس بجاست که بتوان گفت که "ریاضیات تفریحی" زنده است و به راه خود ادامه می‌دهد. دانشمند

یک معمای رمزی

این یک معمای رمزی است که اگر با حوصله و صبر حل آن را آغاز کنید، حتما پاسخ را به دست می‌آورید.

SEND
+ MORE
= MONEY

حروف S و E و N و D و M و O و R و Y نشانگر عددهای مختلف هستند. مسئله فقط یک پاسخ دارد.

پاسخ در صفحهٔ ۱۰۰