آشنایی با نظریهٔ نگاره ها،ـــــ، *دانشمند*، سال ۲۵، ویژه نامهٔ شمارهٔ ۳۰ (ریاضیات)، آذر ۱۳۶۶، ص ۹۹-۱۰۲.

آشنایی با نظریهٔ نگاره‌ها

ترجمهٔ محمد باقری

این نظریه که امروز دوران رشد سریعی را می‌گذراند، شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی خواص نگاره‌ها (گرافها) می‌پردازد. نگاره (گراف) عبارت است از شکلی هندسی شامل تعدادی نقطه و تعدادی خط. در اینجا مهم این است که هر خط کدام نقطه را به کدام نقطهٔ دیگر وصل می‌کند، اما فاصلهٔ بین نقاط و طول خطها اهمیتی ندارد. نظریهٔ نگاره‌ها در بررسی مدارهای الکتریکی، شیمی آلی، فیزیک نظری، مکانیک آماری و همچنین در پژوهشهای رفتارشناسی و جامعه شناسی کاربرد دارد.

منشا نظریهٔ نگاره‌ها

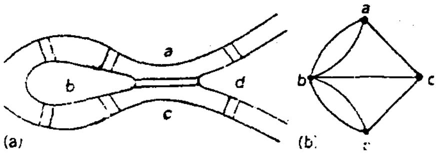
نظریهٔ نگاره‌ها در سال ۱۷۳۶ میلادی، همزمان با مطرح شدن مسئلهٔ پل کونیگسبرگ توسط اویلر، به‌وجود آمد. در آن ایام در کونیگسبرگ (شهر *کالینینگراد* فعلی در شوروی) دو جزیره وجود داشت که به وسیلهٔ هفت پل به یکدیگر و به ساحل رودخانهٔ پره‌گل متصل شده بودند. شکل ۱ این وضعیت را به همراه نگاره‌ای که معادل ریاضی آن است نشان می‌دهد. نقاط a، b، c، d متناظر با نواحی خشکی هستند و خطهای واصل بین آنها نشانگر پلها هستند. مسئله این است که می‌خواهیم از یک ناحیهٔ خشکی شروع کنیم و از هر هفت پل بگذریم، بدون اینکه از هیچ پلی دوبار عبور کرده باشیم. اویلر ثابت کرد که این مسئله جوابی ندارد و دستوری وضع کرد که در مورد هر نگارهٔ همبند (= یکپارچه. نگاره‌ای که بین هر دو نقطهٔ آن حداقل یک مسیر متشکل از یک یا چند خط وجود دارد) صادق است: پیمودن مسیری با شرایط ذکر شده در مسئله‌ای نظیر پل کونیگسبرگ وقتی و فقط وقتی ممکن است که حداکثر دو نقطهٔ فرد داشته باشیم، یعنی فقط دو نقطه چنان باشند که تعداد خطهای ختم شده به آنها فرد باشد. اویلر همچنین ثابت کرد که تعداد نقاط فرد در هر نگاره همیشه عددی زوج است. پس طی مسیر کاملی بدون عبور مجدد از هیچ یک از خطها، وقتی و فقط وقتی مقدور است که تعداد نقطه‌های فرد، صفر یا دو باشد. اگر این تعداد صفر باشد، انتهای مسیر کامل بر شروع آن منطبق خواهد بود.

نگاره را از دیدگاه هندسه می‌توان به عنوان مجموعهٔ رأسها و یالهای چند وجهی سه بُعدی محدبی (مثلا هرم یا منشور) در نظر گرفت. اویلر خاصیت مهمی از این چند وجهی‌ها را کشف کرد. اگر تعداد رأسها، یالها، و وجه‌های چند وجهی را به‌ترتیب V، E و F بنامیم، طبق آنچه اویلر اثبات کرده داریم: $V-E+F=۲$ که امروزه به نام *معادلهٔ اویلر* خوانده می‌شود. مثلا در مکعب داریم $V=۸$، $E=۱۲$ و $F=۶$ چنان که $۸-۱۲+۶=۲$.

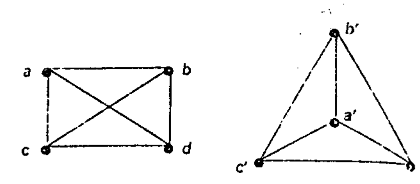
چند تعریف

هر نگاره متشکل است از یک مجموعهٔ نقاط، یک مجموعهٔ خطها و رابطه‌ای که نقاط دو سر هر خط را مشخص می‌کند (رابطهٔ وقوعی). گاهی این شرط ذکر می‌شود که نقاط شروع و پایان هر خط باید متمایز باشند. همچنین در برخی موارد لازم می‌آید که نقاط شروع و پایان هیچ دو خطی مشترک نباشد.

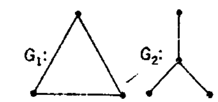
ظرفیت هر نقطه عبارت است از تعداد خطهای ختم شده به آن. دو نگاره را یکریخت (ایزومورف) می‌نامند اگر تناظر یک به یکی بین مجموعهٔ نقاط و مجموعهٔ خطوط یکی با مجموعهٔ نقاط و مجموعهٔ خطوط دیگری موجود باشد به طوری که رابطهٔ



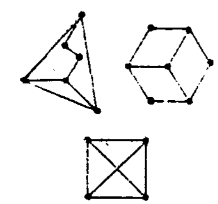
شکل ۱. مسئلهٔ پل کونیگسبرگ الف) هفت پل کونیگسبرگ ب) نگارهٔ مربوط به مسئله



شکل ۲. دو نگارهٔ یکریخت



شکل ۳. دو نگاره که برای هرکدام از آنها چرخش ۱۲۰ درجه یا قرینه یابی نسبت به محور عمودی منجر به خودریختی می‌شود.


شکل ۴. این نگاره‌ها یکریخت نیستند ولی همانریخت هستند.

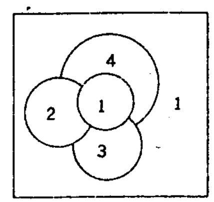
وقوعی برای هر دو یکسان باشد. در شکل ۲ تناظر $a \to a'$، $b \to b'$، $c \to c'$، $d \to d'$، بیانگر یکریختی بین دو نگارهٔ رسم شده است.

خودریختی (اتومورفیسم) یک نگاره یعنی یکریختی آن با خودش. مثلا اگر هر یک از دو نگارهٔ شکل ۳ را ۱۲۰ درجه در صفحه بچرخانیم، یک خودریختی به دست می‌آید (نگاره‌ای یکریخت با حالت قبل از چرخش). همچنین در هر یک از این نگاره‌ها، قرینه‌یابی نسبت به محور عمودی منجر به خودریختی می‌شود. دو نگاره را ***همانریخت*** (هومئومورف) گویند اگر پس از یکسره کردن همه نقاط دارای ظرفیت ۲، به صورت دو نگارهٔ یکریخت درآیند (شکل ۴).

مسئله رنگ آمیزی نقشه‌ها

رسم یک نگاره روی هر سطح، آن سطح را به چند ناحیه تقسیم می‌کند. می‌خواهیم ناحیه‌ها را طوری رنگ آمیزی کنیم که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند. لابد روی نقشه جغرافیایی کشورهای جهان به این موضوع توجه کرده‌اید. معلوم شده است که برای هر سطح مفروض، بدون توجه به تعداد ناحیه‌ها، استفاده از تعداد محدودی رنگ کفایت می‌کند. کوچکترین مقدار ممکن برای این عدد را **عدد رنگی** آن سطح می‌نامند. نقشهٔ مسطحی که در شکل ۵ رسم شده به چهار رنگ نیاز دارد. در سال ۱۹۷۶ با اثبات کفایت چهار رنگ برای نقشه‌های مسطح، مسئلهٔ چهار رنگ که در سال ۱۸۵۰ مطرح شده بود حل شد.

بعضی نقشه‌ها روی سطوح پیچیده‌تر به بیش از چهار رنگ نیاز دارند. مثلا نقشه‌ای روی چنبره که در شکل ۶ نشان داده شده، به هفت رنگ نیاز دارد. برای آنکه این شکل مستطیلی را به نقشه‌ای روی چنبره* تبدیل کنید، باید ابتدا لبه پایینی را بر لبهٔ بالایی منطبق کنید تا یک لولهٔ استوانه شکل ایجاد شود، سپس انتهای چپ استوانه را بر انتهای راست آن منطبق کنید تا سطح چنبره‌ای به دست آید. پیش از این انطباقها، ناحیهٔ ۷ فقط با ناحیه‌های ۱ و ۶ تماس دارد، پس از دو عمل انطباق، این ناحیه با ناحیهٔ ۲ در امتداد FG، با ناحیه ۳ در امتداد GH، با ناحیهٔ ۴ در امتداد AB و با ناحیهٔ ۵ در امتداد BG مرز مشترک

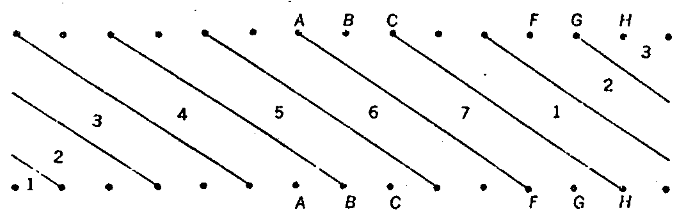


شکل ۵. نقشهٔ مسطحی که به چهار رنگ نیاز دارد.

دارد. در واقع پس از انطباقهای فوق، هر یک از این هفت ناحیه با همهٔ ناحیه‌های دیگر مرز مشترک دارد. بنابراین در اینجا هفت رنگ مورد نیاز است. در سال ۱۸۹۰ ثابت شد که هیچ نقشه‌ای روی چنبره بیش از هفت رنگ لازم ندارد. در سال ۱۹۶۸ محاسبات مربوط به اعداد رنگی همهٔ سطوح بجز صفحه و کره تکمیل شد.

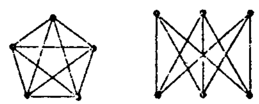
نگاره‌های مسطح. نگارهٔ مسطح نگاره‌ای است که بتوان آن را در صفحه رسم کرد، به طوری که هیچ یک از خطهایش دیگری را قطع نکند. هیچ

*** سطحی شبیه رویهٔ خارجی لاستیک (تویی) اتوموبیل، یا شیرینیهایی که "دونات" نام دارند.**



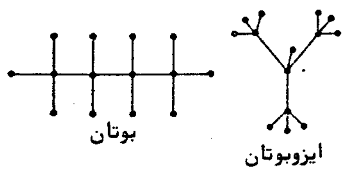
شکل ۶. نقشه‌ای بر روی چنبره که به هفت رنگ نیاز دارد. برای تشکیل چنبره باید ضلعهای روبه‌روی یکدیگر در مستطیل فوق به هم چسبانده شوند.

کدام از دو نگارهٔ شکل ۷ را نمی‌توان به این صورت در صفحه رسم کرد. در سال ۱۹۳۰ ثابت شد که شرط لازم و کافی برای مسطح بودن هر نگاره آن است که شامل هیچ نگاره‌ای همانریخت با یکی از این دو نگاره نباشد.


شکل ۷. هر نگارهٔ غیر مسطح حتما شامل یکی از نگاره‌های فوق است.

کاربردها

ریاضیدانی به نام آ. کیلی، مسئلهٔ شمارش تعداد همپار (ایزومر) های ئیدروکربورهای اشباع شده (به فرمول $C_n H_{2n+2}$) را در قالب نگاره‌ها به صورت تازه‌ای مطرح کرد. هر همپار به صورت یک درخت (نگارهٔ بدون مسیر بسته) است که رأسهای نظیر ئیدروژن آن دارای ظرفیت یک و رأسهای نظیر کربن آن دارای ظرفیت ۴ هستند. (شکل ۸). جورج پولیا در سال ۱۹۳۷ قضیه‌ای بیان کرد که یافتن جواب این‌گونه مسائل را مقدور می‌سازد. بیان قضیهٔ پولیا نیازمند ذکر جزئیات بیشتری است ولی شاید مثال زیر بتواند تا حدی کاربرد قضیهٔ پولیا را نشان دهد: فرض کنید شش گوی داریم که سه تای آنها قرمز، دوتا آبی و یکی زرد است. گویهای همرنگ از یکدیگر قابل تشخیص نیستند. به چند حالت مختلف می‌توان این



شکل ۸. دو همپار ئیدروکربور اشباع شده به فرمول C_4H_{10}

شش گوی را به شش رأس یک هشت وجهی که آزادانه در فضا حرکت می‌کند (رأسهایش تمایزی نسبت به هم ندارند) نسبت داد. با استفاده از قضیهٔ پولیا جواب مسئله ۳ به دست می‌آید که می‌توان درستی آن را با رسم شکل بررسی کرد. قضیهٔ پولیا در فیزیک نظری برای حل مسائلی از مکانیک آماری مورد استفادهٔ فراوان قرار گرفته است.

فرض کنید برخی نقاط یک نگاره متناظر با کارگرهای x_1، ……، x_m و بقیهٔ نقاط متناظر با کارهای y_1، ……، y_m باشند و وجود خطی بین x_i و y_j به معنی آن باشد که کارگر x_i قادر به انجام کار y_j است. مسئلهٔ "تخصیص مشاغل" عبارت است از یافتن m خط به طوری که هر کارگر تنها به یک کار گماشته شود. در مسئلهٔ "تخصیص بهینهٔ مشاغل" روی هر خط عددی نوشته می‌شود که نشان می‌دهد آن کارگر کار مربوطه را با چه کیفیتی انجام می‌دهد. در نظریهٔ نگاره‌ها روشی برای حل این گونه مسائل عرضه شده است.

اگر نقاط یک نگاره نشانهٔ شهرها باشد و روی هر خط فاصلهٔ بین دو شهر نوشته شده باشد، یک

مسئله، یافتن کوتاهترین مسیر بین دو نقطه از نگاره است. در سال ۱۹۵۹ روش کارآمدی برای یافتن این کوتاهترین مسیر عرضه شد. درسال ۱۹۲۷ ثابت شد که اگر A و B دو بخش مجزا از یک نگارهٔ همبند (یکپارچه) G باشند، کمترین تعداد نقاطی که حذفشان A را از B جدا می‌کند برابر است با حداکثر تعداد مسیرهای مجزا بین A و B.

نظریهٔ نگاره‌ها در علوم اجتماعی و رفتاری کاربردهای فراوانی یافته که بسیاری از آنها توسط ریاضیدانی به نام فرانگ هاراری وهمکارانش مطرح شده است. اگر نقاط نگاره نشانگر انسانها و خطوط نگاره نشانهٔ روابطی چون ارتباط، پیوند، یا سلطه باشند، جنبه‌های گوناگونی از ساختارهای اجتماعی را می‌توان در قالب نگاره نشان داد. مثلا انسان شناسان برای توصیف روابط خویشاوندی و دانشمندان علم مدیریت برای نمایش سلسله مراتب شغلی از نگاره‌ها استفاده می‌کنند