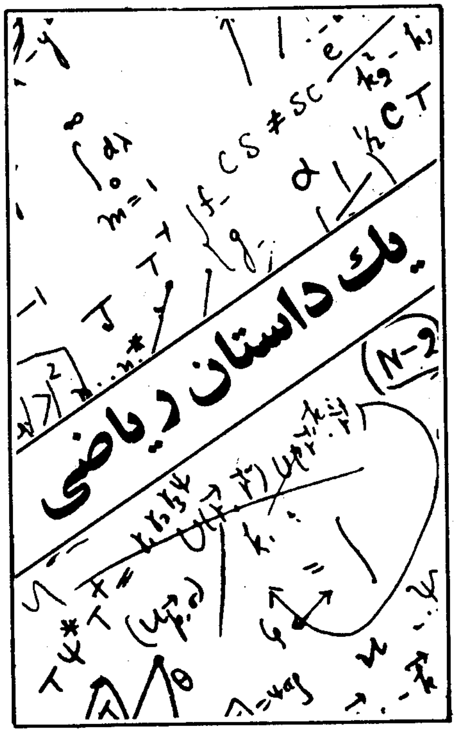
یک داستان ریاضی، *دانشمند*، سال ۲۵، شمارهٔ ۳، خرداد ۱۳۶۶، ص ۶۰ و ۶۷-۶۹.



نوشتهٔ محمد باقری

یکی بود یکی نبود. در روزگار قدیم، میان ساکنان دو شهر همسایه بر سر این موضوع که دانشمندان کدام شهر باهوشترند و پهلوانهای کدامشان قویترند، رقابتی وجود داشت.

یک‌بار قرار می‌شود پهلوانهای دوشهر با هم زورآزمایی کنند. صحنه آماده می‌شود و جمعیت زیادی برای تماشای مسابقه و تشویق همشهریهای خود گرد می‌آیند. از هر شهر هفت پهلوان برای زورآزمایی آمده بودند. طبق رسم آن روزگار، هریک از پهلوانهای یک‌شهر باید با یکایک پهلوانهای شهر دیگر کشتی می‌گرفت و هیچ دوپهلوانی بیش از یک‌بار باهم روبه‌رو نمی‌شدند.

در روز اول، چندین بار پهلوانانی از دو شهر باهم کشتی گرفتند. تعداد پیروزیهای به‌دست‌آمده برای هرشهر در کاغذی یادداشت می‌شد. روی کاغذی دیگر، نام هر دوپهلوانی که کشتی می‌گرفتند کنار هم ثبت می‌شد تا هیچ زوجی از قلم نیفتد یا تکرار نشود. در پایان روز اول کاغذ اخیر در شلوغی جمعیت گم شد. نزدیک بود اوضاع به‌هم بخورد و کار به اختلاف بکشد. سرانجام جوان هوشمندی از شهر (الف) اعلام کرد که اگر فرصتی به او بدهند شاید بتواند مشکل را حل کند.

به او اجازه دادند کارش را شروع کند. او پهلوانهای هر دوشهر را نزد خود خواند و به پرسش از آنها پرداخت. هریک از آنها فقط تعداد کشتیهایی را که در آن روز گرفته بودند به خاطر داشتند. جوان با دانستن همین اعداد توانست معین کند که مسابقه‌های آن روز میان کدام پهلوانها انجام شده و کدام پهلوانها هنوز باهم کشتی نگرفته‌اند.

به‌دنبال این ماجرا، جوان هوشمند دیگری از شهر (ب) اعلام کرد که اگر فقط تعداد کشتیهای انجام‌شده به‌وسیلهٔ هریک از پهلوانهای یک شهر را به او بگویند قادر به تعیین همان مطالب خواهد بود، یعنی اینکه کدام پهلوانها باهم کشتی گرفته‌اند، مشروط به اینکه پهلوانهای شهر دیگر باتوجه به ترتیب تعداد مسابقه‌هایی که در آن شرکت کرده‌اند به‌صف بایستند...

این‌دو جوان به ادعای خود عمل کردند و مسابقهٔ ورزشی با رقابت فکری همراه شد. از سایر قضایا و دنبالهٔ حوادث خبری نداریم. همین‌قدر می‌دانیم که وقتی قرار شد تعداد کشتیهای انجام‌شده به‌وسیلهٔ پهلوانهای یک شهر را (با ذکر نام پهلوان) به جوان هوشمند شهر (ب) بگویند، تعداد کشتیهای انجام‌شده که مربوط به پهلوانهای شهر (ب) بود، چنین اعلام گردید: سه کشتی‌گیر هریک چهاربار، دو کشتی‌گیر هریک یک‌بار، یک کشتی‌گیر پنج‌بار و یک کشتی‌گیر دوبار. آیا می‌توانید بگویید که آن دوجوان هوشمند چگونه به نتایج مطلوب رسیدند و در کار خود موفق شدند؟

پاسخ در صفحهٔ ٦٧

دانشمند
سال ۲۵، شمارهٔ ۳
خرداد ۱۳۶۶

پاسخ داستان ریاضی

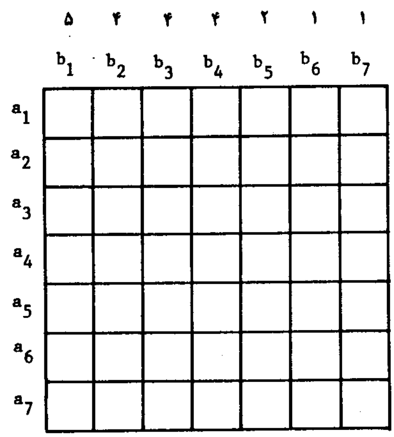
برای بررسی این مسئله، تعداد کشتیهای انجام شده به وسیلهٔ پهلوانهای شهر (الف) را با $a_1, a_2, \dots, a_7$ و همین اعداد را برای شهر (ب) با $b_1, b_2, \dots, b_7$ نشان می‌دهیم، با این شرط که شماره‌ها به ترتیب نزولی تعداد کشتیهای انجام شده مرتب شده باشند؛ یعنی $a_1 \geqslant a_2 \cdots \geqslant a_7$ و $b_1 \geqslant b_2 \cdots \geqslant b_7$. برطبق اطلاعات داده‌شده در صورت مسئله، می‌توان نوشت:

$b_1 = ۵$ $\quad$ $b_5 = ۲$

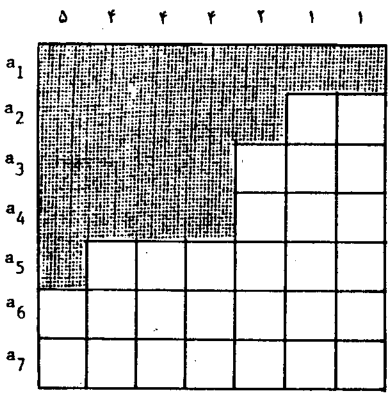
$b_2 = ۴$ $\quad$ $b_6 = ۱$

$b_3 = ۴$ $\quad$ $b_7 = ۱$

$b_4 = ۴$

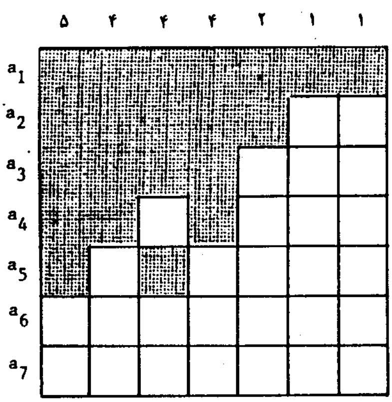


جدول ۷×۷ بالا را درنظر بگیرید. هر سطر آن به یکی از پهلوانهای شهر (الف) و هر ستون آن به یکی از پهلوانهای شهر (ب) مربوط است. این جدول می‌تواند نموداری برای کشتیهای انجام شده باشد و برای این کار باید به‌ازای انجام هر مسابقه، خانه‌ای که محل برخورد سطر و ستون مربوط به دو پهلوان است، سیاه شود. پس مسئله منجر می‌شود به اینکه تعدادی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم، به‌طوری‌که تعداد خانه‌های سیاه در هر ستون مساوی باشد با عدد نوشته‌شده در بالای آن ستون. بسادگی پیداست که این کار را به صورتهای مختلفی می‌توان انجام داد. ابتدا جدول M را به این‌صورت می‌کشیم که در هر ستون به تعداد عدد بالای ستون با شروع از بالاترین خانه و به‌دنبال هم خانه‌ها را سیاه می‌کنیم. این جدول می‌تواند یکی از حالتهای ممکن برای جدول مسابقه‌های انجام شده باشد.



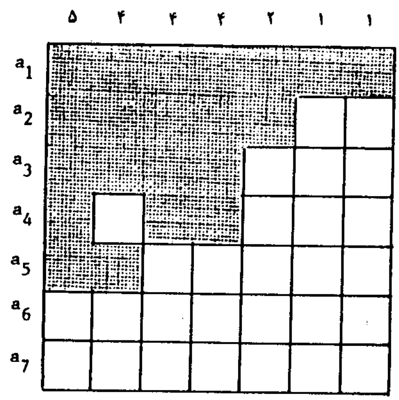
جدول M

اگر چنین باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $a_1 = ۷$، $a_2 = ۵$، $a_3 = ۴$، $a_4 = ۴$ و $a_5 = ۱$. یک حالت ممکن دیگر در جدول N منعکس شده

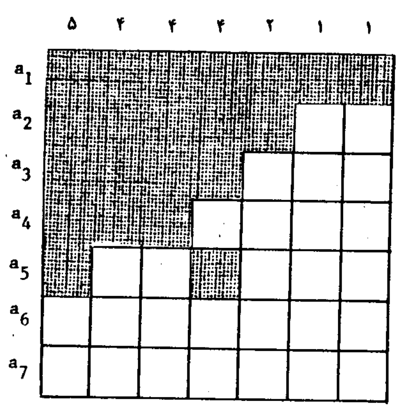


جدول N'

است و پیداست که از این جدول اعداد دیگری برای a_1 تا a_7 به دست می‌آید (توجه کنید که تعداد خانه‌های سیاه در هر ستون تغییر نکرده است). میان جدولهای M و N یک تفاوت مهم وجود دارد. با تغییرمکان دو خانهٔ سیاه در جدول N به جدول N' می‌رسیم. با یک جابه‌جایی دیگر به جدول N'' می‌رسیم و در



جدول N



جدول N''

هر سهٔ این جدولها مقادیر a_1 تا a_7 یکسان باقی می‌ماند: $a_1=۷$ ، $a_2=۵$ ، $a_3=۴$ ، $a_4=۳$ ، $a_5=۲$ ، $a_6=۰$ و $a_7=۰$. دو جدول N' و N'' معادلهایی برای N به شمار می‌آیند ولی برای جدول M معادلی نمی‌توان یافت و تفاوت مهم موردنظر میان M و N هم همین است. پس باتوجه به‌اینکه جوان هوشمند شهر (الف) با داشتن اعداد a_1 تا a_7 و b_1 تا b_7 توانسته بود جدول مسابقه‌های انجام شده را معین کند معلوم می‌شود که جدول مربوطه مثل جدول M فاقد معادل بوده و درنتیجه به طور یکتا قابل‌تعیین بوده است، برخلاف جدول N که دارای معادلهایی به صورت N' و N'' است.

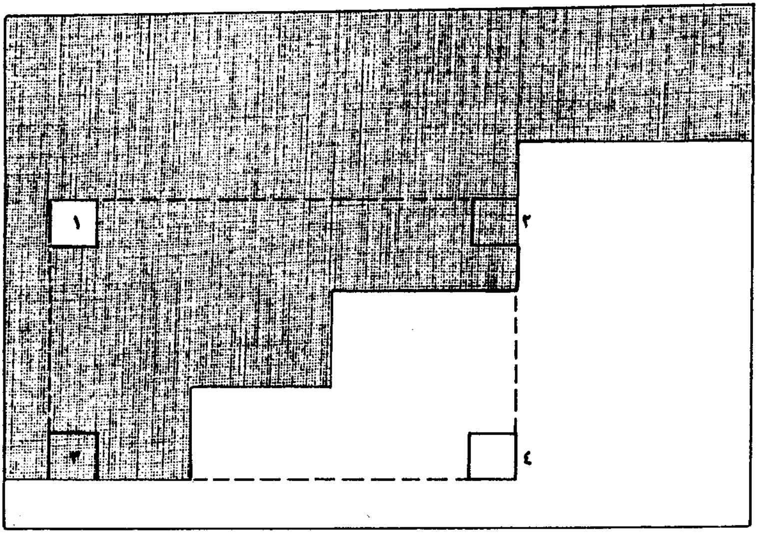
چه خاصیتی در جدول M سبب یکتایی (معادل نداشتن) آن شده است؟ در این جدول هیچ خانهٔ سفیدی بالای خانهٔ سیاه قرار نگرفته است. ثابت می‌کنیم اگر در ستونی از یک جدول خانهٔ سفیدی بالای یک خانهٔ سیاه قرار گیرد آن جدول حداقل دارای یک معادل (به معنی فوق) خواهد بود.

جدول فرضی P را درنظر بگیرید. ناحیهٔ سیاه‌شده (هاشورخورده) سراسر از خانه‌های سیاه پر شده است و تنها خانه‌ای که با شمارهٔ ۱ مشخص شده‌است در این ناحیه سفید است. زیر خانهٔ ۱ تعدادی خانهٔ سیاه قرار دارد. حال خانه‌های ۲ و ۳ و ۴ را که روی جدول P مشخص شده‌اند درنظر بگیرید. خانه‌های ۱ و ۴ سفیدند و خانه‌های ۲ و ۳ سیاه‌اند. اگر خانه‌های ۱ و ۴ را سیاه کنیم و درمقابل، خانه‌های ۲ و ۳ را سفید کنیم جدول P' معادل P به‌دست می‌آید.

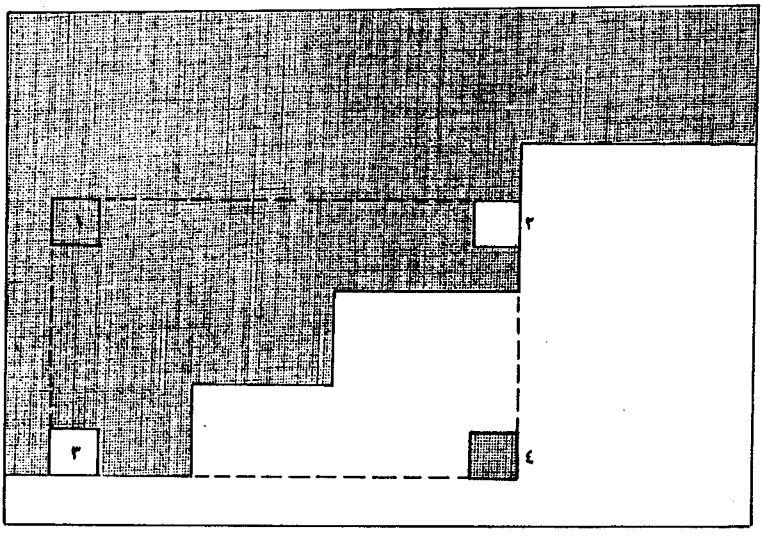
پس حکم مورد نظر ثابت شده است.

حال به داستان خودمان برگردیم. جوان هوشمند شهر (الف) باتوجه به احتمال یکتا بودن (معادل نداشتن) جدول ادعاکرد شاید بتواند جدول را بیابد و جوان هوشمند شهر (ب) با اطلاع از اینکه رقیبش توانسته است جدول را بیابد به یکتا بودن جدول پی برد و براساس بحث فوق دربارهٔ خصوصیات جدول یکتا توانست به نتیجهٔ موردنظر برسد.

جدول P



جدول $\acute{P}$



خلاصه اینکه، اگر دو دسته اعداد a_1 تا a_7 و b_1 تا b_7 را داشته باشیم، تنها درصورتی که بتوان جدولی مانند جدول M برایشان تشکیل داد (که ناحیه‌های سیاه و سفید با یک خط شکستهٔ پلکانی از هم جدا شده‌اند) مسئله فقط یک جواب دارد. همچنین اگر بدانیم مسئله فقط یک جواب دارد آن‌گاه با داشتن یک‌دسته از اعداد فوق می‌توان جدول را به صورتی مشابه جدول M رسم کرد و اعداد دستهٔ دیگر را به‌دست آورد.

بررسی این‌گونه مسائل به‌شاخه‌ای از ریاضیات مربوط می‌شود که **ریاضیات ترکیبیاتی** یا به‌طور خلاصه **ترکیبیات** (Combinatorics) خوانده می‌شود.