یک داستان ریاضی، *دانشمند*، سال ۲۴، شمارهٔ ۱۰، دی ۱۳۶۵، ص ۱۲۱–۱۲۲.

نویسنده: محمد باقری

یك داستان ریاضی

دو دوست قدیمی که از علاقه‌مندان به ریاضیات بودند، قرار گذاشتند که روز اول هرماه (شمسی) یکدیگر را ببینند و ضمن تجدید دیدار، درجریان مطالعات و تحقیقات ریاضی یکدیگر قرار بگیرند.

در اولین دیدار، صحبت از سن فرزندان نیز به میان آمد:

ـ "راستی ببینم، بچهٔ کوچک شما الان سنش چقدر است؟"

ـ "همین‌قدر بدان که تعداد روزهایی که از تولدش می‌گذرد، مجذور کامل است."

در ملاقات بعدی هم، در پاسخ پرسش بالا، عینا" همان جواب داده شد. دوستی که پرسش را مطرح کرده بود توانست روز تولد آن کودک و درنتیجه سن دقیق او را تعیین کند. ضمنا" رو به دوستش کرد و گفت:

"چقدر جالب است! در ملاقات بعدی هم در جواب همین سئوال من می‌توانی جواب قبلی‌ات را تکرار کنی."

آیا می‌توانید بگویید که آن‌کودک در چه‌روزی از سال متولد شده بود؟

***

پاسخ

در سه دیدار متوالی، تعداد روزهایی که از تولد کودک می‌گذشت مجذور کامل بود. سه عدد مربوطه را با A^2، B^2 و C^2 نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت:

$$B^2-A^2=m$$
$$(I)\qquad C^2-B^2=n$$

m و n تعداد روزهای ماه اول و ماه دوم یعنی فاصلهٔ میان دیدار اول و دوم و میان دیدار دوم و سوم است.

برای هریک از اعداد m و n سه مقدار ممکن ۲۹، ۳۰ و ۳۱ (تعداد روزهای ماههای مختلف شمسی) وجود دارد. ثابت می‌کنیم که m و n هیچ‌کدام نمی‌توانند مساوی با ۳۰ باشند.

ابتدا قضیهٔ کلی زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر A و B و m اعداد صحیح باشند و $B^2-A^2=m$، آن‌گاه m یا فرد است، یا مضربی از ۴ است.

بدیهی است که $m=B^2-A^2=(B+A)(B-A)=(B+A)(B+A-2A)$. حال اگر B+A زوج باشد، B+A−2A هم زوج خواهد بود و m مضربی از چهار است.

اگر B+A فرد باشد B+A−2A هم فرد است و درنتیجه m هم فرد خواهد بود.

پس باتوجه به قضیهٔ فوق و معادله‌های (I)، m و n هیچ‌کدام ۳۰ نیستند و هریک از آنها فقط می‌تواند ۲۹ یا ۳۱ باشد.

اگر m و n مساوی باشند:

$$(B^2-A^2)+(C^2-B^2)=m+n=2m \longrightarrow C^2-A^2=2m$$

سمت راست تساوی اخیر حاصلضرب ۲ در یک عدد فرد است و این حالت براساس قضیه‌ای که در بالا اثبات شد ناممکن است.

پس تنها حالت ممکن این است که m و n نامساوی باشند. بدون آنکه مسئله را به روش ریاضی دنبال کنیم، می‌توان دریافت که اولین ماه ۲۹ روزی (m=۲۹) و دومین ماه ۳۱ روزی (n=۳۱) بوده است، زیرا میان ماههای سال فقط دوماه متوالی اسفند و فروردین قابل‌انطباق با تعداد روزهای فوق هستند. پس می‌نویسیم:

$$B^2-A^2=۲۹ \longrightarrow (B+A)(B-A)=۲۹\times ۱$$

باتوجه به اینکه A و B اعداد صحیح هستند، می‌توانیم A و B را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} B+A=۲۹ \\ B-A=۱ \end{cases} \longrightarrow B=۱۵ \text{ و } A=۱۴$$
$$A^2=۱۴^۲=۱۹۶$$

بنابراین، در روزهای اول اسفند، آن کودک ۱۹۶ روزه بوده است.

اگر از اول اسفند ۱۹۶ روز به عقب برگردیم به روز ۱۷ مرداد می‌رسیم که روز تولد آن‌کودک است.

* * *

اما ریاضیدان داستان ما سریعتر توانست روز تولد کودک را پیدا کند، زیرا در ملاقات دوم با دانستن اینکه آن‌روز اول فروردین است و از دیدار قبلی ۲۹ روز می‌گذرد، توانست مستقیماً معادلهٔ $B^2-A^2=۲۹$ را بنویسد و از روی آن همان‌طور که در بالا استدلال شد، مقدار A^2 و درنتیجه روز تولد کودک را پیدا کند. [دانشمند]