× **مسئلهٔ حیرت انگیز هانری پوانکاره**، کالین رورک و یان استوارت، *دانشمند*، سال ۲۴، شمارهٔ ۱۰، دی ۱۳۶۵، ص ۸–۱۳ و ۸۸-۹۳.

نوشتهٔ کالین رورک ــ یان استوارت
ترجمهٔ محمد باقری

مسئلهٔ حیرت‌انگیز هانری پوانکاره

/توپولوژی/بسلایه‌ها/فضاهای چندبعدی/

بیش از ۸۰ سال قبل، هانری پوانکاره، ریاضیدان کبیر فرانسوی، مسئلهٔ بظاهر ساده‌ای مطرح کرد. از آن زمان، نسلهای پی‌درپی ریاضیدانان در حل آن ناکام ماندند ولی سرانجام طلسم این مسئله شکسته شده است.

***

دربارهٔ نویسندگان مقاله: دکتر کالین رورک و دکتر یان استوارت در "موسسهٔ ریاضیات" دانشگاه وارویک (انگلستان) کار می‌کنند. از یان استوارت کتاب جالبی به نام *مفاهیم ریاضیات جدید* به فارسی ترجمه و منتشر شده است: ترجمهٔ جمشید پرویزی، انتشارات خوارزمی، ۱۳۶۳.

توپولوژی یکی از مهمترین پدیده‌های ریاضیات در قرن بیستم است. این شاخه از ریاضیات، به بررسی بنیادیترین خصوصیات شکلهای هندسی می‌پردازد: خصوصیاتی آنچنان قوی که حتی ضمن تا شدن، کش‌آمدن، فشرده شدن یا پیچیده شدن شکل، به‌جا می‌مانند. مثلاً، "درهم پیچیدگی" یک گره، وجود سوراخ در چنبره*، و وجود یک ناحیهٔ درونی و یک ناحیه بیرونی برای کره. شاید در برخورد اول چنین به نظر برسد که این خصوصیات، غیردقیقتر از آن هستند که بتوان آنها را به طور جدی دنبال کرد. ولی حکم تاریخ برخلاف این است: ویژگیهای مزبور، آنچنان بنیادی‌اند که امروزه تاثیرشان در سراسر دنیای علوم و ریاضیات احساس می‌شود. مثلاً فیزیکدانان در کوششهای اخیرشان برای یکپارچه کردن چهار نیروی اساسی طبیعت، ناگزیر شده‌اند توپولوژی صادق درمورد فضا ــ زمان را تعیین کنند (درحال حاضر فضای ۱۰ بعدی مورد توجه قرار گرفته است.).

یکی از مهمترین مسائل حل‌نشده در توپولوژی "حدس پوانکاره" است. پوانکاره در سال ۱۹۰۴ این سئوال را پیش کشید که آیا می‌توان خصوصیات "مشابه سه‌بعدی" سطح کروی را (که یک شکل هندسی دوبعدی است) به طور ساده تعیین کرد (حدس وی را بعداً مشروحتر بیان خواهیم کرد.). بسیاری از توپولوژیستها با این مسئله کلنجار رفته‌اند، ولی تا همین اواخر، پیروزی واقعی آنها بسیار اندک بوده است. چنانکه اخیراً طی مقاله‌ای در مجلهٔ *اخبار علمی* آمده است: "برای ریاضیدانان... اثبات حدس پوانکاره کاری درحد نخستین صعود به قلهٔ اورست خواهد بود." سرانجام در سالهای دههٔ ۱۹۶۰ بود که نخستین نتایج عمده در این زمینه به دست آمد.

توپولوژیستها همهٔ حالات این مسئله را، بجز حالت مطرح شده ازسوی پوانکاره ــ یعنی فضاهای سه‌بعدی ــ بخوبی دریافته‌اند. اکنون، یکی از نویسندگان مقالهٔ حاضر ــ **کالین رورک** از دانشگاه وارویک (انگلستان) ــ به همراه **ادواردو رگو** از دانشگاه اوپورتو (پرتغال)، موفق به اثبات این آخرین حالت باقی‌مانده شده‌اند.

این اثبات مورد آزمونهای دقیق قرار گرفته و همچنان اعتبار خود را حفظ کرده است. ولی مسئله از ظرافت خاصی برخوردار است و هنوز کسی نمی‌تواند حل‌شدن آن را به‌طور یقین بپذیرد. مسائلی‌که به‌آسانی تن به حل شدن نمی‌دهند همیشه محرک و الهام‌بخش ریاضیدانان بوده‌اند. این مسئله نیز با جذابیت فوق‌العادهٔ خود دیدگاه نوینی در ریاضیات گشوده است.

آخرین دانشمند همه‌فن‌حریف

هانری پوانکاره، در روز ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در نانسی (فرانسه) به دنیا آمد. او که فرزند یک پزشک بود، هوشی غیرمتعارف داشت ولی ازلحاظ جسمانی کودک متعادلی نبود. ابتلا به دیفتری درسن پنج سالگی نیز مزید بر علت شد. درسن ۱۵ سالگی، نخستین گرایشهای او به سوی ریاضیات آشکار شد. درسال ۱۸۷۱ در امتحانات نخستین دورهٔ دانشگاهی قبول شد (البته چون در سر جلسه، فکرش به دنبال خواص مقدماتی سری هندسی رفته بود، نزدیک بود در امتحان ریاضی مردود شود!). اندکی بعد امتحانات مدرسهٔ جنگلداری‌را باموفقیت گذراند و بدون آنکه درسر کلاس یادداشتی برداشته باشد، برندهٔ نخستین جایزه در ریاضیات شد. سپس به مدرسهٔ پلی‌تکنیک پاریس که کانون گرم ریاضیات فرانسه بود راه یافت. در آنجا زبردستی او در ریاضیات مورد توجه قرار گرفت وکسانی که می‌خواستند با عرضهٔ مسائل دشوار ریاضی به شهرتش لطمه وارد کنند توفیقی نیافتند، زیرا پوانکاره براحتی آن مسائل را حل می‌کرد.

درسال ۱۸۷۵ وارد "مدرسهٔ عالی معدن" شد تا مهندس شود. اما سه‌سال بعد رسالهٔ دکترایی دربارهٔ معادلات دیفرانسیل به دانشگاه پاریس عرضه کرد. درنتیجه، به‌سال ۱۸۷۹ استاد آنالیز دانشگاه کان شد. درسال ۱۸۸۱ به‌هنگام اشتغال در دانشگاه پاریس، رهبر بی‌چون‌وچرای ریاضیات فرانسه به‌شمار می‌آمد.

معمولاً تصویر رایج از ریاضیدان، فردی فراموشکار و خیال‌پرداز است. پوانکاره یکی از معدود ریاضیدانان بزرگ است که‌این تصویر درموردش صدق می‌کند. ولی این امر به کار ریاضی وی آسیبی نرساند و او توانست در ردیف دوسه ریاضیدان بزرگ عصر خود و یکی از ریاضیدانان بزرگ تاریخ علم درآید. وی ابتدا همه‌چیز را در ذهن می‌پروراند و تنها وقتی دست به‌قلم می‌برد که کلیهٔ مطالب را به میزان دلخواهش در ذهن آماده کرده باشد. او فردی پرکار و گاهی عجول بود. ویژگی آثار او، وجود مراحلی متکی بر شم ریاضیش، در نتیجه‌گیریها بود. اما در تمام این موارد، همگام با پختگی شگفت‌آوری که حتی در انقلابیترین اندیشه‌هایش دیده می‌شد، به اصول منطق نیز سخت پایبند بود.

اریک تمپل بل درکتاب "*ریاضیدانان نامی*"، وی را "آخرین دانشمند همه‌فن‌حریف" و آخرین فردی دانسته است که‌از تمامی ریاضیات درک درستی دارد. به‌جرئت می‌توان گفت که وی در همهٔ رشته‌های ریاضی موجود در زمان خود کار کرده است: نظریهٔ اعداد، آنالیز مختلط، معادلات دیفرانسیل، مکانیک، نجوم و فیزیک ریاضی. علاوه بر این، خود او نیز چند رشتهٔ جدید ابداع کرد. از آن‌جمله در ریاضیات کاربردی می‌توان "نظریهٔ انشعاب"* را نام برد و در ریاضیات محض، احتمالاً بزرگترین ابداع وی توپولوژی است که خودش آن را "تحلیل موضعی"** نامید.

مروری بر آثار پوانکاره نشان می‌دهد که در سراسر دوران شکوفایی ذهنی او، یک

* *نوع سطح بسته که همانند لاستیک تویی اتومبیل است، کلوچه‌هایی هم به این‌شکل می‌سازند که "دونات" نام دارد.*

* bifurcation theory *بررسی رفتار موضعی جوابهای معادلهٔ غیرخطی، درهمسایگی جواب معلومی از معادله، بخصوص وقتی که پارامتری در معادله تغییر کند.*

** *معنای لفظ توپولوژی "جاشناسی" است که با "تحلیل موضعی" کم‌وبیش هم‌معنی است.*

"جریان درونی توپولوژیکی" در آثارش حضور دارد . مثلا" درسال ۱۸۸۹ ، به خاطر ارائهٔ تحلیلی درمورد پایداری منظومهٔ شمسی ، جایزه‌ای ازسوی **اسکار دوم** شاه سوئد به او اهدا شد . گرچه او مسئله را حل نکرد (و تا دههٔ ۱۹۷۰ نیز کسی موفق به حل آن نشد) زیرا جواب این است که مسئلهٔ مذکور اساسا" معقول نیست ، ولی پوانکاره با به‌کارگرفتن روشهای "کیفی" تازه ، دریچهٔ روشنی به سوی مسئله گشود که ماهیت توپولوژیکی داشت .

بعلاوه ، میان سالهای ۱۸۹۲ و ۱۹۰۴ به پیشرفتهای مهمی در توپولوژی "محض" دست یافت و یک‌سری شامل شش مقاله دربارهٔ "تحلیل موضعی" عرضه کرد که بسیاری از مبانی توپولوژی جبری امروز را دربر داشت . اهمیت این نظرات به‌کندی آشکار شد . مثلا" درسال ۱۹۲۱ **ژاک آدامار** طی یک بررسی صدصفحه‌ای از آثار پوانکاره ، تنها دوصفحه را به توپولوژی اختصاص داد . از "حدس پوانکاره" هم سخنی به میان نیاورد !

"بَسلایه‌ها "

"حدس پوانکاره" دربارهٔ چیزی است که توپولوژیست‌ها آن را "بَسلایه" (مانیفولد) می‌نامند. بسلایه مفهومی بسیار بنیادی است که در همهٔ انواع مواضع ظاهر می‌شود. "فضای معمولی" هندسهٔ اقلیدسی یک بسلایه است . آشنایی زیادمان با این فضا سبب می‌شود که وجود "فضاهای" کلی‌تر نادیده بماند . در پیوست ۱ (مطلب داخل کادر) چگونگی پیدایش بسلایه‌های مختلف ضمن توصیف وضعیت مجموعه‌هایی از آونگها نشان داده‌شده است. آونگ منفردی در صفحه را می‌توان به‌وسیلهٔ یک بسلایهٔ یک‌بعدی که دایره است، توصیف کرد . توصیف آونگ در فضا به بسلایه‌ای دوبعدی نیاز دارد که کره (سطح کروی) است. برای دو آونگ در دو صفحهٔ مجزا ، بسلایهٔ دوبعدی دیگری که چنبره باشد ، لازم است .

حال دربارهٔ سه‌آونگ مجزا چه می‌توان گفت ؟ در اینجا دستگاهی با سه‌درجه آزادی لازم است که به نحوی ، به توسط سه دایره

پیوست ۱. بسلایه، چنبره و کره

چگونه می‌توان برای حرکت آونگی که به یک مفصل لولایی وصل شده و تنها می‌تواند در یک صفحهٔ قائم حرکت کند ، مدلی ریاضی ساخت ؟ اگر مسافت جابه‌جایی آونگ خیلی کم باشد ، همین مسافت را می‌توان به طور محسوسی برای بیان موقعیت جدید آن به کار گرفت (با علامت مثبت یا منفی ، بسته به اینکه آونگ به طرف راست رفته باشد یا چپ). پس مدل وضعیت گلولهٔ آونگ را می‌توان به صورت نقطه‌ای واقع بر یک خط راست درنظر گرفت (شکل ۱.الف). اما جابه‌جاییهای بزرگ به طرف راست سبب عبور گلولهٔ آونگ از بالای تکیه‌گاه می‌شوند و تاثیری همانند حرکت به سمت چپ دارند .

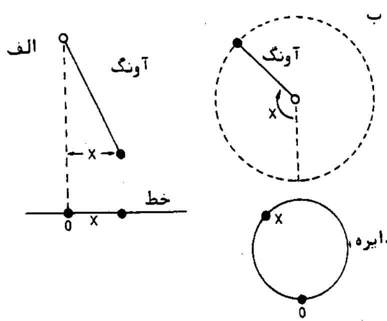
پس مدل درست برای وضعیتهای گلوله ، *دایره* است (شکل ۱.ب). هم خط و هم دایره، بسلایهٔ یک‌بعدی هستند ، یعنی "فضاها" یی که به‌طور موضعی یک "درجه آزادی" دارند .

اکنون مسئله را قدری پیچیده‌تر می‌کنیم . آونگی را درنظر بگیرید که به یک مفصل همه‌سویی (چهارشاخ) وصل است ، به‌طوری‌که می‌تواند در همهٔ جهات نوسان کند . حرکتهای کوچک این آونگ را می‌توان به صورت موقعیت یک نقطه در صفحهٔ x-y نشان داد . در اینجا هم حرکتهای بزرگ ، سبب عبور گلوله از بالای مفصل می‌شوند و مدل درست به صورت کره است . هم صفحه و هم کره ، نمونه‌هایی از بسلایهٔ دوبعدی (یا سطح) هستند که دو درجه آزادی دارند . بین این نمونه‌ها "تشابه خانوادگی" برقرار است . می‌توان گفت که خط، یک صفحهٔ یک‌بعدی و دایره ، یک کرهٔ یک‌بعدی است ، یعنی خط و دایره مشابه‌های یک‌بعدی نظیر صفحه و کره هستند .

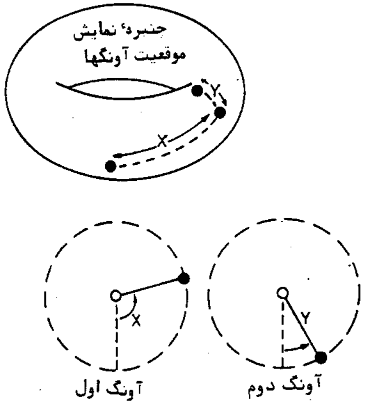
یک بسلایهٔ دوبعدی دیگر ، چنبره است (سطح خارجی لاستیک تویی اتومبیل ــ شکل ۲) . این بسلایه ، مدل درستی برای وضعیت دو آونگ مستقل است و تغییرمکانهای (x,y) روی چنبره ، با وضعیت گلوله‌های دو آونگ روی دایره‌های مربوط به خودشان متناظر است .

خاصیت بدیهی هر سطح این است که در همه‌جا به طور موضعی دو درجه آزادی دارد . موجودات دوبعدی براحتی می‌توانند در هر سطحی زندگی کنند و تاوقتی که راه خیلی دوری نروند ، تفاوت چندان زیادی احساس نخواهند کرد . آنها فقط می‌توانند نوع فضایی را که در آن به سر می‌برند ، ازطریق اندازه‌گیریهای در مقیاس "نجومی" تعیین کنند و بفهمند که این فضا در بینهایت عملا" چه انحنایی دارد .

به‌طورکلی ، بسلایهٔ n بعدی ، فضایی است که به طور موضعی n درجه آزادی دارد . بسلایه‌های سه‌بعدی برای ما اهمیت خاصی دارند زیرا خودمان در فضای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم . وضع ما هم مثل همان موجودات دوبعدی است : همین‌قدر می‌دانیم که فضای ما **به طور موضعی** مستوی (هموار) است ، مثل فضای معمولی سه‌بعدی اقلیدسی . اما نمی‌دانیم که در فواصل دوردست چه‌نوع انحنایی دارد . با اطلاعاتی که ما داریم ، این فضا **هر** بسلایهٔ سه‌بعدی می‌تواند باشد . پس هر قضیه‌ای دربارهٔ محدود کردن بسلایه‌های سه‌بعدی ممکن ، درمورد فضای معمولی هم مصداق خواهد داشت .

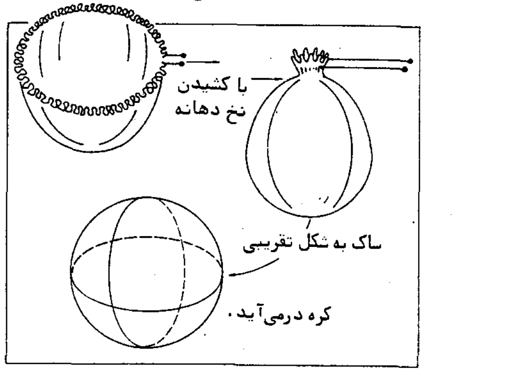


شکل ۱. جابه‌جایی‌های کوچک آونگ را می‌توان با مدل خطی بیان کرد (الف)، برای جابه‌جایی‌های بزرگ به مدل دایره‌ای نیاز داریم (ب).



شکل ۲. چنبره مدل مناسبی برای نمایش دادن همزمان موقعیت دو آونگ مستقل است .

ایجاد می‌شود. چنین چیزی وجود دارد و نامش **چنبرهٔ سه‌بعدی** است. **کرهٔ سه‌بعدی** (مشابه سه‌بعدی سطح کروی) هم وجود دارد که می‌توان آن را به صورت فضای سه‌بعدی معمولی که "لبه‌اش روی‌هم جمع شده" تجسم کرد، حالتی مثل ساک دستی که با تنگ کردن نخ دهانه‌اش، جمع می‌شود و به صورت (تقریبا") کروی درمی‌آید (شکل ۳). ("لبهٔ" فضای سه‌بعدی در بینهایت واقع است.).



شکل ۳. اگر در عالم خیال، لبهٔ صفحه را که در بینهایت قرار دارد جمع کنیم، شکل تقریبی یک کره به دست می‌آید.

این توصیف، جنبهٔ مهمی از کرهٔ سه‌بعدی، یعنی "شباهت خانوادگی" آن را به کرهٔ دوبعدی نشان می‌دهد. رفتار این دو بسلایه اغلب شبیه یکدیگر است. بخصوص اینکه، کرهٔ سه‌بعدی مثل کرهٔ دوبعدی "از همه‌سو به طرف خودش خمیده است" و در هیچ سمتی بینهایت امتداد ندارد. چنین بسلایه‌ای را **بسته** می‌نامند. کرهٔ دوبعدی، چنبره و دایره، بسته محسوب می‌شوند ولی خط و صفحه چنین نیستند. "حدس پوانکاره" دقیقا" مربوط است به میزان این شباهتهای خانوادگی و بخصوص، اینکه کرهٔ سه‌بعدی تا چه‌حد به کرهٔ دوبعدی شباهت دارد.

ریاضیدانها هم مثل گیاه‌شناسان ناگزیر از دسته‌بندی چیزها هستند و درست همان‌طور که گیاه‌شناسان می‌کوشند تا همهٔ گونه‌های گیاهی را بیابند، ریاضیدانان هم برآنند که همهٔ اشیای ریاضی از یک نوع مورد نظر را کشف کنند. اما ریاضیدانها ـ برخلاف گیاه‌شناسان ـ گاهی می‌توانند یقین کنند که هیچ چیز از قلم نیفتاده است. در اینجا کافی است ***برهانی*** یافته شود که کامل بودن رده‌بندی را نشان دهد. انگیزهٔ این کار تنها علاقه به طبقه‌بندی اشیا نیست: برای آنکه کسی واقعا" بتواند همهٔ اشیای یک نوع خاص را گردآوری کند، باید شناخت روشنی نسبت به آنها داشته باشد. این امر درحکم محکی برای قدرت ریاضی است.

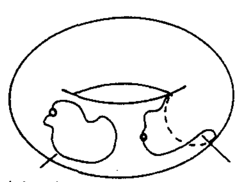
در قرن نوزدهم، ریاضیدانان توانستند سطوح (بسلایه‌های ۲ بعدی) را به طور کامل رده‌بندی کنند. نکتهٔ مهم در این کار، تعداد سوراخهای سطح است. کره هیچ سوراخی ندارد، چنبره یک سوراخ دارد، الی آخر. این شیوهٔ بظاهر ساده، در بررسی ریاضی سطوح، اهمیت فوق‌العاده‌ای می‌یابد و ضمنا" خیلی ساده‌تر از آن است که مستقیما" قابل گسترش به بعدهای بالاتر باشد. با این‌حال، نطفهٔ مفاهیم گوناگونی را در خود دارد که به بعدهای بالاتر هم راه می‌یابند.

سوراخ چیست؟ کارگاههایی که کلوچه‌های حلقه‌ای (دونات) می‌سازند لازم نیست به فکر تهیهٔ سوراخ برای کلوچه‌های خود باشند، یا انباری برای نگهداری سوراخها فراهم کنند. سوراخ، جزئی از این کلوچه‌های حلقه‌ای نیست، بلکه می‌توان گفت جایی است که در آن کلوچه "وجود ندارد". ریاضیدانها سعی دارند مفهوم نسبتا" فرار "سوراخ" را به طور غیرمستقیم مهار کنند. با بررسی رفتار حلقه‌های بستهٔ رسم شده روی سطح می‌توان راجع به وجود سوراخ در سطح، اظهارنظر کرد. برتری این روش در آن است که رفتار فوق، یک جنبهٔ "ذاتی" سطح است.

فرض کنید یک مورچهٔ نزدیک‌بین، بر روی سطحی حرکت می‌کند. چون این مورچه جاهای

دور را نمی‌بیند، نمی‌تواند به سادگی بفهمد که آیا سطح زیر پایش کره است، یا چنبره یا یک سطح ناآشنای دیگر. با این‌حال، اگر بتواند سوراخی در آن کشف کند **می‌تواند** بگوید که آن سطح کره نیست. ولی این مورچه نمی‌تواند "از بیرون" به سطح نگاه کند و وجود سوراخ را تشخیص دهد. ازطرف دیگر هم نمی‌تواند از سطح جدا شود و در سوراخ بیفتد. تنها کاری که از او برمی‌آید این است که مسیرهای دایره‌واری به صورت حلقه‌های بسته بر روی سطح بپیماید. ممکن است چنین مسیری برحسب اتفاق از داخل سوراخ بگذرد. برای پی بردن به این موضوع، مورچه باید حلقه را تنگتر و تنگتر کند. حلقه‌هایی را که از درون سوراخ نمی‌گذرند می‌توان به دلخواه کوچکتر و کوچکتر کرد ولی درمورد حلقه‌هایی که از درون سوراخ می‌گذرند، این کار ممکن نیست (شکل ۴).

روی کره، هر حلقهٔ بسته‌ای را می‌توان آن‌قدر کوچک کرد که به صورت یک نقطه درآید. رده‌بندی سطوح نشان می‌دهد که در هر سطح دیگری حلقه‌های "کوچک‌نشدنی" (حلقه‌های گذرنده از سوراخ) وجود دارد. پس مورچه‌ها و توپولوژیستها می‌توانند با بررسی قابلیت کوچک شدن حلقه‌ها، از وجود سوراخ در سطح



شکل ۴. بعضی از حلقه‌های روی چنبره را می‌توان تا حد تبدیل به نقطه کوچک کرد. ولی حلقه‌هایی هم وجود دارند که آنها را نمی‌توان کوچکتر کرد تا به نقطه تبدیل شوند.

آگاه شوند. اگر سطح کره باشد، همهٔ حلقه‌ها را می‌توان کوچک کرد و اگر بتوان همهٔ حلقه‌ها را کوچک کرد، سطح باید کره باشد. به‌همین ترتیب می‌توان گفت که اگر کسی در حیاط خانه‌اش مسیر بسته‌ای را بپیماید که کوتاهتر کردن آن جز با خیس شدن پاها، ممکن نباشد، حتما" حوضی در وسط حیاط قرار دارد.

چنانکه گفتیم، کرهٔ معمولی دوبعدی ***تنها*** بسلایه‌ای دوبعدی است که در آن همهٔ حلقه را می‌توان (تا حد تبدیل به نقطه) کوچک کرد. اصطلاح ریاضی برای چنین فضایی "همبند ساده" است. اگر شباهت خانوادگی کافی بین کرهٔ دوبعدی و کرهٔ سه‌بعدی موجود باشد، همین نتیجه را برای کرهٔ سه‌بعدی هم باید بتوانیم بگیریم. پس این حدس معقولی است که ***تنها بسلایهٔ ۳ بعدی همبند ساده*** (بسلایه‌ای که در آن همهٔ حلقه‌ها را می‌توان تاحد تبدیل به نقطه کوچک کرد) کرهٔ سه‌بعدی است. این حکم، همان حدس پوانکاره است. ولی آیا این حکم حقیقت دارد؟

مشکل پاسخگویی به پرسش بالا، در روشی نهفته است که برای یافتن جواب حالت دوبعدی درپیش گرفته می‌شود. در آنجا فهرستی از همهٔ سطوح ممکن تهیه می‌شود. سپس یکایک آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد تا معلوم شود که بجز کره، همهٔ سطوح دارای حلقه‌های کوچک‌نشدنی هستند. کار ساده‌ای است! اما باوجود آنکه رده‌بندی بسلایه‌های دوبعدی در قرن نوزدهم صورت گرفت، تاکنون کسی نتوانسته بسلایه‌های سه‌بعدی را رده‌بندی کند. به‌همین دلیل، روش فوق در اینجا کارآمد نیست. از همه بدتر آنکه، ظاهرا" هر اقدامی برای رده‌بندی بسلایه‌های سه‌بعدی منوط به درستی حدس پوانکاره است. یعنی بازگشت به آغاز راه!

ابتدا ریاضیدانان به پیشرفتهای اندکی درمورد این حدس دست یافتند. نخستین نتایج عمدهٔ کار آنها برای موارد مشابه در بعدهای بالاتر، بررسی خصوصیات کره‌های

ادامه در صفحه ۸۸

ادامه از صفحه ۱۳

پیوست ۲ . منظور واقعی پوانکاره چه بود ؟

درواقع ، اصطلاح "حدس پوانکاره" نام بی‌مسمایی است ؛ پوانکاره مسئله را به صورت یک پرسش (بدون حدس صریح درمورد جواب آن) مطرح کرد نه به عنوان حدس (دربارهٔ ماهیت جواب) . اما مجموعهٔ مقالات او نشان می‌دهد که وی انتظار داشت جواب "آری" باشد .

یادداشتهای او دربارهٔ ***تحلیل موضعی*** شامل یک رسالهٔ عمده (مربوط به سال ۱۸۹۲) و پنج "ضمیمهٔ" بعدی است که آخرین آنها درسال ۱۹۰۴ ارائه شد . امروزه دو مفهوم اساسی به نام ***همتایی*** (همولوژی) و ***همجایی*** (هموتوپی) وجود دارد . همتایی ، صورت پیراستهٔ مفهوم "چند سوراخ ؟" است و در زمان پوانکاره این سئوال با استفاده از ابزاری ریاضی به نام ***اعداد بتی*** پاسخ داده می‌شد . همجایی ، به تغییرشکل حلقه‌ها مربوط است . درمورد سطوح ، کار این‌دو ابزار کم‌وبیش یکسان است ولی در بعدهای بالاتر دیگر چنین نیست .

پوانکاره در نخستین مقاله می‌پرسد : آیا اگر دو بسلایهٔ سه‌بعدی اعداد بتی یکسان داشته باشند ، ازلحاظ توپولوژیکی حتما "هم‌ارزند؟ درمورد سطوح (بسلایه‌های ۲ بعدی) بی‌شک چنین است ، ولی پوانکاره می‌افزاید : "خواهیم دید که جواب منفی است و همین نشان می‌دهد که در بعدهای بالاتر ، مسائل تحلیل موضعی پیچیده‌تر می‌شوند ." وی برای این‌منظور ، مفهوم تازه‌ای به نام "گروه بنیادی" را مطرح کرد .

ضمیمهٔ دوم مربوط است به آنچه امروزه وارون همتایی (کوهمولوژی) و همزادی (دوالیته) پوانکاره خوانده می‌شود . پوانکاره اینجا هم درپی آن است که دریابد آیا اعداد بتی برای مشخص‌کردن بسلایه کافی هستند یا نه . او ثابت می‌کند که مفاهیم تازه‌ای به‌نام ***ضریبهای تاب*** (ترسیون) باید به‌کار گرفته شود . پوانکاره مکررا "اصطلاحهای "همبند ساده" و "همریختی با آبَرکره" (یعنی معادل توپولوژیکی کرهٔ سه‌بعدی) را به‌عنوان مفهومهای مترادف به کار می‌گرفت . وی در این مرحله هنوز درنیافته بود که در اینجا مسئله‌ای را باید حل کرد . در پایان می‌گوید "برای آنکه مقاله زیاد طولانی نشود ، صورت قضیهٔ زیر را که اثباتش مستلزم گامهای متعدد دیگری است ، بیان می‌کنم ."

قضیه‌ای که او بیان می‌کند اساسا "این است که هر بسلایه‌ای که همهٔ اعداد بتی و همهٔ ضریبهای تاب آن یک باشد ، حتما "همبند ساده است (که ظاهرا "منظورش "معادل توپولوژیکی کرهٔ سه‌بعدی" است) . درواقع ، چه بخواهیم "همبند ساده" را دقیقا "به معنی "کوچک‌شدنی بودن حلقه‌ها" یا "کرهٔ سه‌بعدی" بگیریم و چه نخواهیم آن را چنین معنی کنیم ، این قضیه نادرست است . مسلما "پوانکاره هنوز مشغول مرتب‌کردن افکارش بود .

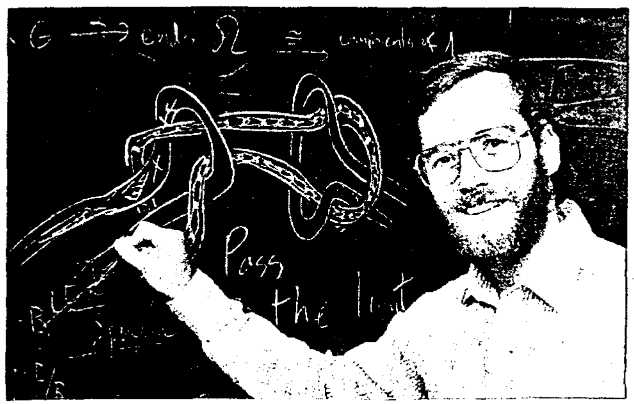
مقالهٔ اصلی ، پنجمین ضمیمه است که درسال ۱۹۰۴ ارائه شد . پوانکاره در این مقاله یادآوری می‌کند که علاوه بر اعداد بتی ، ضریبهای تاب هم باید مطابقت داشته باشند . او می‌گوید : "حال این سئوال مطرح می‌شود که آیا درنظر گرفتن این ضریبها کافی است ؛ آیا بر این‌اساس ، بسلایه‌ای که همهٔ اعداد بتی و ضریبهای تاب آن یک باشند ، **همبند *ساده* به معنی حقیقی *کلمه* ، یعنی همریختی *با آبَرکره*** است ؛ یا اینکه برعکس ، برای مشخص‌کردن اینکه آیا بسلایهٔ موردنظر همبند ساده است یا نه ، ابتدا باید به بررسی گروه بنیادی آن پرداخت ."

به‌این‌ترتیب پوانکاره دریافت که در فرض قبلی‌اش مبنی بر اینکه "کوچک‌شدنی بودن همهٔ حلقه‌ها" به‌منزلهٔ "کرهٔ سه‌بعدی بودن" است ، خلائی وجود دارد . ولی خود او مشخصا "چنین ابراز می‌دارد که گروه بنیادی پاسخگوی مسئله خواهد بود . سپس مثالهایی می‌آورد ــ ازجمله "فضای دوازده‌وجهی" ــ تا نشان دهد بسلایه‌ای که همهٔ اعداد بتی و ضریبهای تاب آن یک باشد ، الزاما "ابرکره نیست . در پایان می‌گوید : "یک سئوال هنوز جای بحث دارد : آیا ممکن است که گروه بنیادی بدیهی باشد ولی با این‌حال بسلایه همبند ساده نباشد ؟ . . . اما این سئوال ما را از موضوع اصلی دور می‌کند ."

پوانکاره "حدس" خود را چنین بیان می‌کند . وی درواقع خود جوابی به مسئله نمی‌دهد . اما همچنان که گفته شد در مقاله‌های قبلی و درآغاز این مقاله طوری صحبت می‌کند که گویی انتظار دارد جواب "آری" باشد . بی‌سبب نیست که در دنیای ریاضیات ، با درک این گرایش پوانکاره ، اصطلاح "حدس پوانکاره" رایج شده است .

چندبعدی براساس رفتار حلقه‌های چندبعدی بود . درسال ۱۹۶۱ ، استیون اسمیل صورت n بعدی حدس پوانکاره را برای $n>7$ ثابت کرد ، سپس اسمیل ، کریستوفر زیمان ، و جان استالینگز حالتهای $n=5$ و $n=6$ را هم به آن افزودند . بعد از وقفه‌ای که تاسال ۱۹۸۲ طول کشید ، مایکل فریدمن با استفاده از نتیجهٔ کار قبلی آندرو کاسون ، حالت $n=4$ را هم اثبات کرد . به‌این‌ترتیب ، فقط یک حالت اثبات‌نشده (به‌ازای $n=3$) باقی ماند ؛ همان حالت اصلی مطرح‌شده ازسوی پوانکاره ! روش اصلی به‌کارگرفته‌شده توسط رگو و رورک ، برای اثبات حدس پوانکاره ، ***جراحی*** یا "بریدن و چسباندن" نام دارد . آنها به جای اینکه حلقه‌ها را در بسلایهٔ سه‌بعدی کوچک کنند ، از مفهوم لوله‌های چنبره‌ای (تیوب)

کریستوفر زیمان که در حل حالتهای $n=5$ و $n=6$ همکاری کرد .



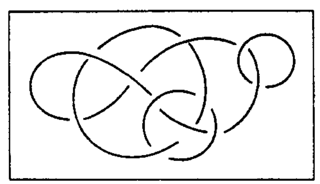
مایکل فریدمن که چندی پیش برندهٔ نشان فیلدز شد .

کمک گرفتند. اگر داخل این لولهٔ چنبره‌ای را جدا کرده و قاب آن را تغییر دهیم و سپس آن را به جای خود بگذاریم (شکل ۵)، در بسلایه تغییراتی اساسی و درعین‌حال قابل تصور پدید می‌آید. مثالی می‌آوریم (گرچه قطعیت آن روشن نیست): با انجام جراحی روی یک کرهٔ سه‌بعدی، وقتی که لولهٔ چنبره‌ای به شکل گره ساده پیچ خورده باشد، فضای دوازده‌وجهی پوانکاره (که در پیوست ۲ از آن نام برده‌ایم) به دست می‌آید. به‌طور کلی، به جای آنکه تنها یک منحنی به کار گرفته شود، می‌توان عمل جراحی را با استفاده از دستگاه کاملی از منحنیها انجام داد که ریاضیدانان آن را "زنجیره"ای در بسلایهٔ سه‌بعدی می‌نامند.

این روش به دو دلیل اهمیت دارد. دلیل اول عام بودن آن است: می‌توان ثابت کرد که هر بسلایهٔ سه‌بعدی با انجام جراحی مناسب، قابل‌تبدیل به هر بسلایهٔ دیگری است. متاسفانه راههای مختلفی برای انجام جراحی وجود دارد ولی مزیت دوم این روش، مانع از سرگردانی می‌شود: نحوهٔ ارتباط این راههای مختلف با یکدیگر، دقیقا" قابل‌بیان است.

پایهٔ‌نظری این روش که به نام ابداع‌کننده‌اش رابین کربی، **حساب کربی** خوانده می‌شود، زبانی برای بیان برهان حدس پوانکاره فراهم می‌آورد. هر بسلایهٔ سه‌بعدی را می‌توان با ایجاد "زنجیره"ای در کرهٔ سه‌بعدی ازطریق جراحی به دست آورد. باتوجه به اینکه کرهٔ سه‌بعدی، همبند ساده است، به جای توصیف

شکل ۵. طرز انجام جراحی ریاضی در بسلایهٔ سه‌بعدی. یک لوله را بیرون می‌آوریم و پس‌از آنکه تاب آن را تغییر می‌دهیم، به جای اولیه برمی‌گردانیم.

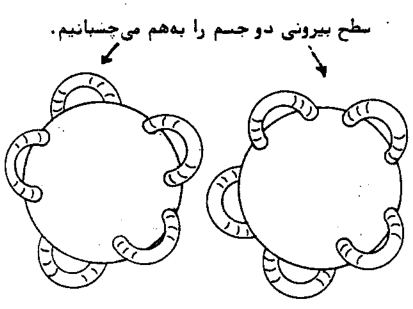


شکل ۶. زنجیره‌ای در بسلایهٔ سه‌بعدی

عمل جراحی، می‌توانیم دنباله‌ای از "حرکتها" را در حساب کربی به‌کار بگیریم. اگر نتیجهٔ این حرکتها به‌صورت کرهٔ سه‌بعدی جراحی‌شده قابل‌تشخیص باشد، حدس پوانکاره اثبات می‌شود.

علاوه بر جراحی، روش بسیار مناسب دیگری نیز برای توصیف بسلایه‌های سه‌بعدی وجود دارد. "جسم دستگیره‌دار" گوی توپری است که دستگیره‌های توپری رویش چسبیده است (شکل ۷) اگر سطح دو جسم دستگیره‌دار با تعداد دستگیره‌های مساوی را تماما" به هم بچسبانیم، حاصل کار یک بسلایهٔ سه‌بعدی است. چنین ساختاری **تجزیهٔ هیگارد** نام دارد و زبان دیگری برای بیان برهان حدس پوانکاره عرضه می‌کند. برهان رگو و رورک "دوزبانه" است، بدین‌معنی که در آن واحد از هردو زبان استفاده می‌کند.

برهان حدس پوانکاره تاحدی شبیه جور کردن رنگها در مکعب روبیک است. در نگاه اول، تعداد حالتها آنقدر زیاد و تعداد حرکتهای ممکن آنقدر معدود است که ظاهرا" امیدی به‌حل معما باقی نمی‌ماند. اما رفته‌رفته می‌توان دسته‌هایی از حرکات پیاپی را مشخص کرد که درعمل مفید واقع می‌شوند. مثلا" یک قطعهٔ واقع در یال را چپ و راست می‌کنند، یا یک قطعهٔ واقع درکنج را درجا می‌پیچانند.



شکل ۷. تجزیهٔ هیگارد یک بسلایهٔ ۳ بعدی به دو جسم دستگیره‌دار

اما گیر کار در این است که همین حرکتها، قسمتهای مرتب‌شدهٔ مکعب را دوباره به هم می‌ریزند. بنابراین باید توجه داشت که این حرکتها چگونه بر ساختمان کلی اثر می‌گذارند و چگونه می‌توان با انجام آنها در ترتیب مناسب، تاثیرهای جانبی‌شان را به حداقل رساند. این خود برنامهٔ کار را پیچیده می‌کند، ولی اگر بتوانیم به تعداد کافی از این "دسته حرکتهای" مفید را پیدا کنیم، سرانجام زمانی می‌رسد که دیگر راه‌حل قطعی مسئله به طور کامل قابل‌بیان است.

چرا چنین نتیجه‌ای مهم است؟ حتما" موضوع برای توپولوژیست‌ها خیلی مهم است، زیرا اگر چنین نبود، این‌همه از آن به هیجان نمی‌آمدند. ولی بخشی از جاذبهٔ مسئله برای آنها، صرف وجود مسئله است، همان‌طور که کوههای بلند، کوهنوردان را به سوی خود فرا می‌خوانند. صعود به قلهٔ اورست شاهکار بزرگی است، ولی پس‌از آنکه پای کسی به قله رسید، تنها کاری که می‌تواند بکند، بازگشت به پایین است. اورستهای ریاضی هم ممکن است به همین سادگی، فاقد هرگونه مقصد بعدی باشند.

با این‌همه، برای وجود توپولوژی یک دلیل خوب وجود دارد: توپولوژی چارچوب مناسبی برای توصیف مفاهیم مربوط به پیوستگی است. این مفاهیم در سراسر قلمرو علم پدیدار می‌شوند. طی دههٔ اخیر، توپولوژی رفته‌رفته نقش چشمگیری بخصوص در فیزیک ریاضی کسب کرده است.

حدس پوانکاره "ریاضیات بنیادی" به شمار می‌آید. این حدس پاسخگوی سئوالهای اساسی در ریاضیات است. نسلهای آیندهٔ ریاضیدانان با دانستن این پاسخها، مبنایی برای تلاشهای خود دراختیار خواهند داشت. مهمترین جنبهٔ هر قضیهٔ ریاضی این است که افزایشی ابدی به دانش بشری است و برخلاف تازه‌ترین نظریه‌های علمی رایج، روزی کهنه نخواهد شد. بدین‌سان، نتایج به‌دست‌آمده در بستر

هانری پوانکاره در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ به دنیا آمد و در ۱۷ ژوئیه ۱۹۱۲ درگذشت. او یکی از بزرگترین دانشمندان نظری فرانسه بود. سهم او در پیشرفت ریاضیات، فیزیک ریاضی، و مکانیک سماوی، بسیار مهم است.
می‌توان گفت که پوانکاره، پدیدآورندهٔ توپولوژی جبری و نظریهٔ توابع تحلیلی با چند متغیر مرکب است. او، همچنین پیشرفتهای قابل‌توجهی را در نظریهٔ توابع آبلی و هندسهٔ جبری به ثمر رساند. کتابهای زیر از آثار پوانکاره است: روشهای جدید مکانیک سماوی، درسهایی از مکانیک سماوی، علم و فرضیه، علم و روش، و ارزش علم.

اصلی ریاضیات، پایه‌ای برای **روشهای** پرتوان نوین فراهم می‌آورند و صرفا" یادگارهایی از گذشتهٔ خاموش نیستند.

رورک که یکی از ما ـ نویسندگان این مقاله ـ است، در یک مصاحبهٔ رادیویی موضوع را چنین تشریح کرده است: "مدلهای ریاضی موردبحث ما، بسیار بنیادی‌اند، چیزهایی هستند که دایما" با آنها برخورد می‌کنیم. هروقت کسی در فیزیک یا ریاضیات مدلسازی می‌کند با این بسلایه‌ها روبه‌رو می‌شود. کار ما هم عبارت است از ارائهٔ قضیه‌ای بنیادی دربارهٔ این مدلهای ریاضی که بسیار کلی هستند. برای آنکه شخص بتواند آزادانه از مدلها استفاده کند، چنین کاری باید قبلا" انجام شده باشد. منظورم این است که ما از نوع فضایی که در آن به سر می‌بریم بی‌اطلاعیم، این‌طور نیست؟ همین‌قدر می‌دانیم که این فضا به طور موضعی سه‌بعدی است. در مقیاس جهانی، ممکن است به نحوی پیچ خورده باشد. این را هم نمی‌دانیم که در بینهایت عملا" چه وضعی پیدا می‌کند. قاعدتا" باید به صورت کرهٔ سه‌بعدی باشد، زیرا فضا را می‌توان به صورت نوعی سطح تابشی تصور کرد که بر اثر انفجار بزرگ اولیه به سوی بیرون گسترش می‌یابد..."

ماخذ:

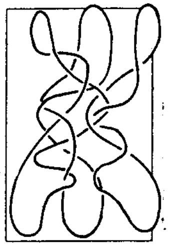
Colin Rourke & Ian Stewart
"Poincare's perplexing problem"
New Scientist 4 Sep. 1986.
(P. 41-45)

پیوست ۳. برهان حدس پوانکاره

برهان واقعی حدس پوانکاره، بحث پیچیده‌ای است، اما می‌توان تصوری از آن داشت. ساده کردن زنجیره‌ها ازطریق باز کردن منظم و اصولی آنها در "تور ریاضی" کاربرد وسیعی دارد.

نوار کشسانی اختیار کنید و هر سرش را با دو انگشت شست و سبابهٔ یک دستتان بگیرید، به‌طوری‌که یک دست بالای دست دیگر قرار گیرد. اگر آن را سفت بکشید می‌توانید (لبه‌های) آن را به صورت دو رشتهٔ جداگانه تصور کنید که بدون هیچ تغییرجهتی از بالا تا پایین امتداد دارند. حال اگر دو دست را به هم نزدیک کنید، حلقه‌هایی در یک‌طرف آویخته خواهد شد (مثل گوش نرم و آویزان سگهای شکاری) و هر رشته، جایی در وسط مسیرش تغییرجهت خواهد داد.

مناسبترین زنجیره‌ها برای منظور ما، آنهایی هستند که هر مولفهٔ حلقه‌ای‌شان از دو رشته ساخته شده باشد که در بالا و پایین به هم وصل‌اند و در بین راه تغییرجهت نمی‌دهند (شکل ۸). **جوان بیرمن و جری پاول** متوجه شدند که در این‌گونه زنجیره‌ها، ارتباط نزدیکی میان جراحی و تجزیهٔ هیگارد موجود است. این امر سبب می‌شود که امکان گفتگو بین دو "زبان" مزبور فراهم آید.



شکل ۸. طرح انتزاعی یک گیس بافته‌شده. هر مولفهٔ زنجیره یک‌بار بدون تغییرجهت از بالا به پایین می‌رود و یک‌بار هم بدون تغییرجهت از پایین به بالا می‌رود.

ریموند لیکوریش ثابت کرده است که هر بسلایهٔ سه‌بعدی را می‌توان ازطریق جراحی بر روی این زنجیره‌های "مناسب" به دست آورد و این نقطهٔ شروع برهان موردبحث است. طبق نتیجه‌گیری بیرمن و پاول، بسلایهٔ سه‌بعدی دارای یک تجزیهٔ هیگارد متناظر، به دو جسم دستگیره‌دار (K و H) است. هر دستگیره در H مرز یک دیسک را در بسلایهٔ سه‌بعدی تشکیل می‌دهد. اگر همهٔ این دیسکها "تخت" باشند، به پایان رساندن برهان آسان خواهد بود. متاسفانه این دیسکها می‌توانند "غیرعادی" باشند، یعنی به این‌سو و آن‌سو خم شوند یا از داخل خودشان بگذرند. منظور ما کار بر روی این دیسکهای غیرعادی و صاف کردن آنهاست، درحدی که بتوان تشخیص داد که آیا بسلایه واقعا "کرهٔ سه‌بعدی است یا نه. این کار با استفاده از "حرکتها"ی حساب کربی انجام می‌شود. همیشه باید به یک نکتهٔ مهم توجه داشت: زنجیره‌ها باید "مناسب" باقی بمانند. این نحوهٔ برخورد با مسئله منجر به مسائل ترکیبی بسیار پیچیده ـ اما حل‌شدنی ـ می‌شود که از چارچوب این مقاله خارج است. دانشمند