دانش و مردم ۲

☜جابربن حیان ☜در جهان چند زبان وجود دارد؟
☜مردی که جهان امروز را خلق‌کرد (درباره‌ی انیشتین)
☜موسیقی آسمان (کپلر) ☜دانشمند آماتور
☜بهداشت روان خانواده ☜هزار نکته‌ی پزشکی و ...

دورهٔ جدید، شمارهٔ ۲، اردیبهشت ۱۳۷۹
علمی، آموزشی، فرهنگی
ماهانه، ۱۱۶ صفحه، ۵۰۰۰ ریال

دانش و مردم

(علمی، آموزشی، فرهنگی)

دورهٔ جدید، شمارهٔ ۲، اردیبهشت ۱۳۷۹
ماهانه، ۱۱۲ صفحه، ۵۰۰۰ ریال

صاحب امتیاز و مدیر مسئول:
دکتر محمدرضا طاهریان
زیر نظر شورای نویسندگان
مدیر فنی: حسن نیک‌بخت
اجرای جلد: سیروس لرستانی
روی جلد: کوردوبا

حروفچینی: گنجینه ۶۴۱۴۰۱۴
لیتوگرافی: آبرنگ ۶۴۰۴۹۷۷
چاپ و صحافی: رامین ۶۷۰۸۵۸۱

اشتراک سالانه: ایران ۵۰۰۰۰ ریال
خارج: معادل ۱۵۰ فرانک فرانسه
نشانی: تهران، صندوق‌پستی ۵۹۳/ ۱۳۱۴۵
به‌نام نشریه دانش و مردم تلفن: ۶۷۰۸۵۸۱
پست الکترونیکی:
Danesh va mardom @ Mavara.Com

***

حق اشتراک و کمکهای نقدی خود را به‌حساب جاری شمارهٔ ۲۳۵۲ بانک ملی ایران خیابان جمهوری، خیابان سی تیر به‌نام نشریه دانش و مردم واریز نمائید و رسید یافتوکپی آن‌را به‌دفتر مجله ارسال فرمائید.

***

مقاله‌هایی که در «دانش و مردم» چاپ می‌شود، الزاماً دیدگاه گردانندگان آن نیست و نظر نویسنده مقاله یا مترجم را منعکس می‌کند.

***

فهرست

***

محمد باقری

سرگرمی‌های ریاضی در

مفتاح المعاملات حاسب طبری

مساله‌های ریاضی تفننی همواره برای جلب علاقه‌ی غیرمتخصصان و آشنا کردن آنان با زیبایی و جذابیت ریاضیات به‌کار رفته است. این مساله‌های ریاضی در قالب عناصری از زندگی روزمره ـ هرچند غیرواقعی ـ بیان می‌شوند به‌گونه‌ای که حتا غیر ریاضیدانان هم ترغیب می‌شوند برای حل آن‌ها تلاش کنند.

این نکته برای کسانی که در جست و جوی راه‌هایی برای برانگیختن علاقه‌ی دانش‌آموزان به‌ریاضیات هستند، بسیار مهم است. این علاقه در ریاضیدانان پیشاپیش وجود دارد و می‌توان گفت مساله‌های حل نشده، همین اثر را برای ریاضیدانان دارند و آنان را به‌کشف قلمروهای تازه سوق می‌دهد. مفهوم‌های ریاضی نهفته در مساله‌های تفننی را بازرگانان، سربازان، جهانگردان و مانند این‌ها به‌عنوان معماهای ذهنی با خود به‌سرزمین‌های دوردست برده‌اند.

قالب ظاهری مساله‌های ریاضی که آن‌ها را برای غیر ریاضیدانان ملموس می‌کند، رنگ و بوی ملی، تاریخی و جغرافیایی دارد. بررسی مساله‌های شبیه، در فرهنگ‌های مختلف می‌تواند به‌شواهدی برای تماس‌های احتمالی بین این فرهنگ‌ها منجر شود. گاهی ضمن انتقال یک مساله از محیطی به‌محیط دیگر، قالب ظاهری آن هم تغییر می‌کند و با عناصری از محیط جدید تطبیق داده می‌شود. در ادامه‌ی مقاله چند نمونه برای این موضوع می‌آورم. در چنین مواردی هم، تشابه ساختاری این مساله‌ها می‌تواند رهگشا باشد. نکته‌ی دیگری که میزان بستگی احتمالی بین مساله‌های مشابه در سنت‌های مختلف را نشان می‌دهد، یکسانی مقدارهای عددی متناظر است؛ برای نمونه در مورد مساله‌ی مربوط به ۱۰۰ پرنده که در نوشته‌های چینی، هندی، فارسی، عربی و اروپایی به‌آن برمی‌خوریم.

در این جا می‌خواهم چند نمونه‌ی جالب از مساله‌های تفننی در یک رساله‌ی کهن فارسی به‌نام *مفتاح المعاملات* اثر ابوجعفر محمدبن ایوب طبری معروف به‌حاسب طبری، ریاضیدان و اخترشناس ایرانی اهل طبرستان (مازندران کنونی) را بیان کنم. طبری در نیمه‌ی دوم سده‌ی پنجم هجری فعالیت علمی داشت. او نخست اثر فارسی دیگری در حساب به‌نام **شمارنامه**

نوشت که قدیمی‌ترین متن فارسی موجود درباره‌ی حساب هندی است (به‌کوشش تقی بینش در سال ۱۳۴۵ هجری شمسی به‌وسیله‌ی بنیاد فرهنگ ایران چاپ شده است)، و پس از آن *مفتاح المعاملات* را به‌احتمالی به‌عنوان مکمل آن نوشته است. چنان که در آغاز این رساله می‌گوید: «چون ما بپرداختیم از رساله‌ی *شمارنامه* که او اصل شمار هندی است، خواستیم که تمامی و فایده‌ی او اندرین رساله‌ی *مفتاح‌المعاملات* پیدا کنیم جز خداوندان صناعت نجوم را که در او تمام گفته‌ایم.»

پروفسور هاینریش هرملینک[1] از مونیخ در مقاله‌ای که در نخستین همایش بین‌المللی تاریخ علوم عربی [منظور، کشورهای زیر حکومت اسلامی] (حلب، آوریل ۱۹۷۶) عرضه کرد، *مفتاح المعاملات* را غنی‌ترین منبع مساله‌های تفننی ریاضی در سنت ریاضیات شرق به‌شمار آورد. متن *مفتاح المعاملات* به‌کوشش دکتر محمدامین ریاحی در سال ۱۳۴۹ هجری شمسی به‌وسیله‌ی بنیاد فرهنگ ایران منتشر شده است. این ویرایش براساس نسخه‌ی خطی یگانه‌ی *مفتاح المعاملات* موجود در کتابخانه‌ی ایاصوفیه‌ی استانبول به‌شماره‌ی ۲۷۶۳ فراهم آمده است. نسخه‌ی مزبور در سال ۶۳۲ هجری قمری در شهر سیواس به‌دست کاتبی به‌نام فضل‌الله فرزند ابراهیم فرزند محمود الخلاصی رونویسی شده است. دکتر اولریخ ریستاک[2] از فرایبورگ (آلمان) در سال ۱۹۹۲ در کتاب *حساب در شرق اسلامی*، *مفتاح المعاملات* طبری را به‌اختصار توصیف کرده است. طبری کتاب دیگری هم درباره‌ی سرگرمی‌های ریاضی نوشته است به‌نام *المونس فی نزهة اهل المجلس* که نسخه‌ای از آن در رامپور (هند) نگهداری می‌شود.

مفتاح المعاملات که برای غیر ریاضیدان‌ها نوشته شده، به‌ویژه به‌خاطر اصطلاح‌های ریاضی فارسی که در آن به‌کار رفته، یکی از مهم‌ترین آثار فارسی درباره‌ی حساب است. این رساله ۶ فصل دارد که هرفصل به‌چندین در (باب) تقسیم شده است. فصل چهارم با عنوان «در نوادر و مضمرات»، ۵۴ در دارد که هر در حاوی یک مساله است. همه‌ی این مساله‌ها در ردیف سرگرمی‌های ریاضی نیستند و در این جا جالب‌ترین آن‌ها را می‌آورم. برخی از این مساله‌ها ماهیت جبری دارند. اما طبری راه حل آن‌ها را به‌زبان حساب و بدون آوردن برهان بیان می‌کند.

□

مساله‌ی ۱۷ فصل چهارم مفتاح الحساب درباره‌ی مضمرات است، یعنی یافتن عددی که کسی در ذهن خود انتخاب کرده است از راه اطلاعات جانبی که از او می‌گیریم. مقاله‌ی دوم از چهار مقاله‌ی *المونس فی نزهة اهل المجلس* طبری نیز به‌همین موضوع اختصاص یافته است. صورت مساله‌ی ۱۷، فصل ۴، *مفتاح المعاملات* چنین است:

1. Heinrich Hermelink
2. Ulrich Rebstack

«گر پرسند ما را: از عددی که به‌دل گرفته باشند و به‌دست راست و به‌دست چپ که جمله هژده باشد که بازگوی کز آنِ دل چند است و از آنِ دو دست چند؟» راه حل طبری این است که از آن شخص می‌خواهم عدد دل را در ۲، عدد دست راست را در یکی کم‌تر از مجموع یعنی ۱۷ و عدد دست چپ را در خود مجموع که ۱۸ است ضرب کند و مجموع حاصلضرب‌ها را اعلام کند. اگر به‌فرض بگوید ۲۵۴، این عدد را از مجذور ۱۸ که ۳۲۴ است کم می‌کنیم، مانده ۷۰است. آن را بر ۱۶ یعنی دو واحد کم‌تر از مجموع اولیه تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت ۴ می‌شود که عدد دل است و باقیمانده ۶ می‌شود که عدد دست راست است. مجموع این دو را از ۱۸ می‌کاهیم، عدد دست چپ ۸ به‌دست می‌آید. ساختار جبری مساله چنین است:

$$x + y + z = ۱۸$$

$$۱۸x + ۱۸y + ۱۸z = ۳۲۴$$

$$۲x + ۱۷y + ۱۸z = ۲۵۴$$

باکاستن معادله‌ی سوم از دوم نتیجه می‌شود $۱۶x + y = ۷۰$ و با تقسیم دو طرف بر ۱۶ خواهیم داشت $\frac{۷۰}{۱۶} = \frac{y}{۱۶} + x$ پس $x = [\frac{۷۰}{۱۶}]$ و $y = ۷۰ - ۱۶x$؛ یا $x = ۴$، $y = ۶$ و در نتیجه $z = ۸$.

□

مساله‌ی ۱۸ چنین است: «اگر بپرسند ما را از درختی که بالای او سه یک در آب است، و چهار یک او در گل، بر هوا شده است ده گز. جمله چند گز باشد بالای درخت؟» ارتفاع درخت از طریق عمل ساده‌ی حسابی روی کسرها به‌آسانی پیدا می‌شود. صورت کامل‌تری از این مساله در باب ۳۸ آمده است که در آن جا از کل ارتفاع درخت، $\frac{1}{۳}$ در آب، $\frac{1}{۴}$ در گل، $\frac{1}{۵}$ در ریگ، $\frac{1}{۶}$ و دوباره ۱۰ گز در هواست. همین عناصر در مساله‌ی ۳۱ با ساختاری متفاوت ظاهر می‌شود که در آن جا از ارتفاع درختی $\frac{1}{۲}$ در آب، $\frac{1}{۳}$ در گل و جذرش در هواست. در این مساله:

$$x = \frac{x}{۲} + \frac{x}{۳} + \sqrt{x} \qquad \frac{x}{۶} = \sqrt{x} \qquad \sqrt{x} = ۶ \qquad x = ۳۶$$

□

مساله‌ی ۳۷ همان ساختار مساله‌ی ۱۸ را دارد ولی به‌جای ارتفاع درخت به‌وزن ماهی مربوط می‌شود: «اگر پرسند ما را از ماهیی که سرش سه یک اوست و دنبش پنج یک او، میانش بی سر و دنب ده من. جمله چند من باشد؟»

اصل این مساله به‌احتمالی از هند است. مهاویرا ریاضیدان هندی سده‌ی نهم میلادی (سوم هجری در کتاب **گانیتا ـ سار ـ سَنگَرَه**[1] مساله‌ی مشابهی آورده است که در آن از کل ارتفاع ستونی، $\frac{1}{۸}$ در خاک، $\frac{1}{۲}$ در آب، $\frac{1}{۴}$ در گل و ۷ گز در هواست. در ریاضیات ایرانی، این مساله در

1. Ganita - sāra - Sangaraha

قالب ارتفاع درخت، وزن ماهی، طول ترکه یا تکه‌ای پارچه رایج بود. شیخ بهایی دو صورت از این مساله را ترکیب کرده و تعیین طول یک ماهی را خواسته است که $\frac{1}{3}$ آن در گل، $\frac{1}{4}$ آن در آب و سه وجب آن در هواست (مساله‌ی شماره‌ی ۱۵ در خلاصة الحساب). صورتی که طبری در مساله‌ی ۳۱ آورده و شامل جذر است و به‌معادله‌ی درجه‌ی دوم منتهی می‌شود نیز از منابع هندی گرفته شده است؛ این مساله را در کتاب مهاویرا و در کتاب ***پاتی‌گانیتا***[1] از سریدهارا[2] (سده‌ی ۸ میلادی / ۲ هجری) نیز می‌یابیم.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی صورت دیگری از این مساله را به‌عنوان مساله‌ی ۲۵ باب چهارم مقاله‌ی پنجم ***مفتاح الحساب*** چنین آورده است: وزن سر یک ماهی $\frac{4}{9}$ وزن کل آن و وزن دم آن ۵ برابر ریشه‌ی پنجم وزن کل آن و وزن بقیه (یعنی تنه‌ی آن) ۸ برابر وزن دم آن است. این مساله به‌معادله‌ی درجه‌ی پنجمی منتهی می‌شود که به‌آسانی قابل حل است:

$$x^5 = \frac{4}{9}x^5 + 5x + 40x \qquad \frac{5}{9}x^5 = 45x \qquad x^4 = 81 \qquad x = 3$$

وزن کل $x^5 = 243$؛ وزن سر $\frac{4}{9}x^5 = 108$؛ وزن دم $5x = 15$؛ وزن تنه $40x = 120$

به‌نوشته‌ی هرملینک، این مساله در غرب به‌نام «نی در آب» معروف بوده و نخستین بار آن را فیبوناچی بیان کرده است.

□

مساله‌ی ۲۴ درباره‌ی یافتن کسی است که انگشتری را نزد خود پنهان کرده است. چون فرض می‌کنیم افراد یک جمع به‌ردیف ایستاده‌اند، مساله تبدیل میشود به‌یافتن عدد مجهول n به‌کمک اطلاعات غیرمستقیم. از کسی که n را می‌داند می‌خواهیم آن را در $\frac{3}{2}$ ضرب کند و اگر نتیجه نیمه‌ای داشت، عدد صحیح بعدی را به‌جای حاصلضرب اختیار کند که در این صورت یک انگشت خود را خم می‌کنیم. دوباره از او می‌خواهیم نتیجه‌ی اخیر را در $\frac{3}{2}$ ضرب کند یا به‌قول طبری «نیمه‌ی جمله که دارد بر سرش فزاید» و اگر نتیجه نیمه‌ای داشت، عدد صحیح بعدی را به‌جای حاصلضرب اختیار کند و در این صورت دو انگشت دیگر خود را هم خم می‌کنیم. سپس از او می‌پرسیم از این نتیجه‌ی نهایی چند ۹ می‌توان بیرون بیاوریم و به‌ازای هر ۹، چهار عدد به‌تعداد انگشت‌های خم شده می‌افزاییم. حاصل نهایی همان n خواهد بود. ساختار ریاضی این تردستی جالب چنین است:

عدد اولیه‌ی n	مرحله‌ی اول	مرحله‌ی دوم	تعداد ۹ها	حاصل نهایی
$4k$	$6k$ (بدون انگشت خم شده)	$9k$ (بدون انگشت خم شده)	k	$4k$
$4k + 1$	$6k + 2$ (یک انگشت خم شده)	$9k + 3$ (بدون انگشت خم شده)	k	$4k + 1$

1. Patiganita

2. Sridhara

$4k + 2$	$6k + 3$ (بدون انگشت خم شده)	$9k + 5$ (یک انگشت خم شده)	k	$4k + 2$
$4k + 3$	$6k + 5$ (یک انگشت خم شده)	$9k + 8$ (دو انگشت خم شده)	k	$4k + 3$

این مساله را پیش از طبری، ابومنصور عبدالقاهر فرزند طاهر بغدادی (درگذشته به‌سال ۴۲۹ هجری قمری) در کتاب *التکملة فی‌الحساب* خود که به‌عربی است، آورده است. ابومنصور باقیمانده‌های طرح نُه نُه در هر حالت، یعنی ۳، ۵ و ۸ را نیز ذکر کرده است.

در متن‌های ریاضی اروپایی این مساله در آثار بِدا وِنرابیلیس[1] (انگلستان، ۶۷۳ ـ ۷۳۵ میلادی) و فیبوناچی (ایتالیا، ۱۱۸۰ ـ ۱۲۵۰ میلادی) آمده است.

□

مساله‌ی ۲۷ درباره‌ی مردی است که مقداری پول نقره دارد. می‌گوید اگر علاوه برآن، $\frac{1}{2}$ همان مقدار و $\frac{1}{3}$ همان مقدار و $\frac{1}{6}$ همان مقدار و ۵ درهم دیگر نیز می‌داشت، در آن صورت پولش ۲۰ درهم می‌شد. این مساله منجر به‌معادله‌ی درجه‌ی اولی می‌شود به‌صورت $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 5 = 20$ که نتیجه می‌دهد $x = ۷/۵$ خود مساله اهمیتی ندارد. ولی مساله‌ی شماره‌ی ۴۷ با همین ساختار مربوط است به‌یافتن n، تعداد کبوتران نشسته بربام، با دانستن این که مجموع n و n و $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{4}$ به‌علاوه یک مساوی با ۱۰۰ است.

بی‌تردید همه‌ی شما این دو بیت معروف فارسی را که بیانگر این معما است، شنیده‌اید که از زبان کبوتری اهلی در جواب کبوتری وحشی که تعدادشان را پرسیده، سروده شده است:

جمع ما را طعنه بر قلت مزن   زانکه ما اهلیم و بیحد می‌شویم
ما و ما و نصف ما و ربع ما   گر تو هم با ما شوی صد می‌شویم

جواب این مساله با حل معادله‌ی خطی $x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$ به‌صورت $\frac{11x}{4} = 99$ و $x = 36$ به‌دست می‌آید. همین مساله در قالب دیگری در کتاب *حساب* آنانیا شیراکاتسی ریاضیدان ارمنی سده‌ی هفتم میلادی (سده‌ی اول هجری) آمده است. فصل پنجم این کتاب شامل چند مساله‌ی ریاضی تفننی است که دومین آن‌ها چنین است: «به‌آن دوستت بگو که یک بار در جشن ما یک جهانگرد پارسی گروهی از جهانگردان یونانی را دید و آنان را صدا زد: اگر شما را به‌من می‌دادند، دوباره به‌اندازه‌ی شما می‌دادند، باز هم به‌اندازه‌ی نیمی از شما و به‌اندازه‌ی یک چهارم شما؛ من هم با شما صد نفر می‌شدیم. خوب حالا بگو چند جهانگرد یونانی بودند. اگر دوستت آدم دانایی باشد بی‌درنگ خواهد گفت شمار یونانیان ۳۶ بود و اگر او نادان باشد، جست و جوهای وی و ندانستن این مطلب باعث خنده و شادی تو می‌شود.» آلکوین یورکی[2]

---

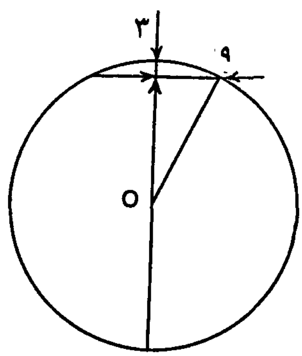
1. Beda Venerabilis
2. Alcuin of York

(۷۳۲ - ۸۰۴ م) ریاضیدان انگلیسی هم در کتاب ***مساله‌هایی برای تقویت ذهن جوانان***[1] که قدیمی‌ترین مجموعه‌ی مساله ریاضی به‌زبان لاتینی به‌شمار می‌آید، همین مساله با عنوان «مسافر» با همین اعداد و بدون اشاره به‌ملیت مسافران آورده شده است. به‌نوشته دیوید سینگماستر از دانشگاه ساوث بانک لندن که شرحی براین مساله‌ها نوشته است: «کهن‌ترین صورت این مساله را در پاپیروس ریند سراغ داریم. مساله یونانی سن دیونانتوس هم از همین مقوله است. در سده‌های میانه صورت‌های مختلفی از این مساله آمده است و این صورت با نام «درود خدا برتو بادا» بیان می‌شود؛ زیرا این نخستین کلامی است که مسافرها در برخورد با یکدیگر برزبان می‌آورند.»

□

در مساله ۴۲ ***مفتاح المعاملات*** درختی داریم که ۳ گز آن بیرون از آب است. بادی وزید و درخت را خم کرد به‌طوری که نوک درخت را ۹ گز آن سوتر به‌سطح آب رساند. ارتفاع درخت چقدر است (شکل ۱)

طبری جواب مساله را طبق معمول به‌صورت الگوریتمی بدون آوردن برهان (براساس قضیه‌ی ۳۴ مقاله‌ی سوم ***اصول*** اقلیدس راجع به‌تساوی حاصلضرب بخش‌های دو وتر متقاطع در دایره) بیان کرده است:



۹ × ۹ = ۸۱

۸۱ ÷ ۳ = ۲۷

۲۷ + ۳ = ۳۰

۳۰ ÷ ۲ = ۱۵

این مساله در متن‌های کهن ریاضی چین به‌عنوان مساله ۶ مقاله‌ی نهم، ***نُه فصل در فن حساب*** و نیز به‌عنوان مساله‌ی ۱۳ مقاله‌ی اول ***کتابچه‌ی ریاضی ژانگ کیوجیان***[2] در همان قالب نی خم شده برسطح آب آمده است. همین ساختار هندسی در مساله‌ی دیگری از ***نه فصل*** دیده می‌شود که در آن یک تیر چوبی استوانه‌ای که بخشی از قطر آن در دیوار فرو رفته است با سوهان به‌عمق یک «کو» ساییده شده و پهنای قسمت ساییده شده ۱۰ «کو» است؛ شعاع مقطع تیر چوبی

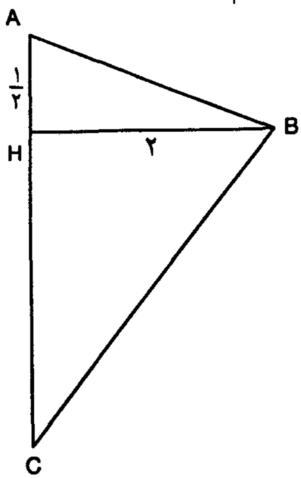
1. *Propositiones ad acuendos juvenes*		2. Zhang Qiu Jian

خواسته شده است.

در ریاضیات هند هم این مساله در کتاب حساب بهاسکرا (۱۱۱۴ ـ حدود ۱۱۸۵ میلادی) به‌نام *لیلاوتی* آمده است. این کتاب که بهاسکرا آن را به‌نام دخترش تالیف کرده در سال ۱۵۸۷ میلادی به‌دست فیضی دکنی به‌فارسی برگردانده و در سال ۱۸۲۸ میلادی در کلکته چاپ شده است. ترجمه‌ی انگلیسی این کتاب هم در سال ۱۸۱۷ میلادی چاپ شده است. صورت مساله در *لیلاوتی* به‌ترجمه‌ی فیضی دکنی چنین است: «در میان حوض نهال نیلوفری بود که مقدار نیم دست از آب سرکشیده بود. ناگاه بادی برو وزید که مقدار دو دست مایل شده در آب فرو رفت. اکنون می‌خواهیم بدانیم چه مقدار از آن نهال در آب ایستاده است و از بیخ آن نهال تا سر او که در آب غرق شده چند است؟» بهاسکرا مساله را به‌روش جبری حل کرده است (شکل ۲):

$$BC - HC = AC - HC = \frac{1}{2}$$

$$BC + HC = \frac{BC^2 - HC^2}{BC - HC} = \frac{HB^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$



با کم کردن دو طرف دو معادله، عمق آب به‌دست می‌آید:

$HC = 3/75$ دست

جمشید کاشانی هم صورتی از این مساله را به‌عنوان اولین نمونه از ۸ مساله‌ی هندسی در *مفتاح الحساب* آورده است. «نیزه‌ای در آب نشانده شده و ۳ ذرع از ارتفاع آن بیرون از آب است. باد نیزه را کج کرد به‌طوری که در آب فرو رفت و نوک آن ۵ ذرع دورتر به‌سطح آب رسید. طول نیزه چقدر است؟» (شکل ۳)

کاشانی به‌روشی مشابه طبری با تقسیم مجذور AH بر HC اندازه‌ی HD را به‌دست آورده است: $\frac{25}{3} = 3 \div 5 \times 5$. با افزودن HC نتیجه می‌شود. $\frac{34}{3} = CD$ که قطر دایره است و با نصف کردن آن، شعاع دایره که همان طول نیزه است پیدا می‌شود:

$\frac{34}{3} \div 2 = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ گز

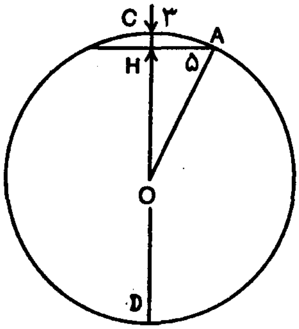
کاشانی این مساله را به‌روش جبری هم حل کرده است:

$$HO = X \quad X^2 + 25 = AO^2 = OC^2 = (X+3)^2$$

$$X^2 + 25 = X^2 + 6X + 9 \quad 6X = 16 \quad X = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

این مساله در داستانی به‌نام کاواناگ[1] از هنری وردورث لانگ فلو[2] (۱۸۰۷ - ۱۸۸۲) شـاعر آمـریکایی هـم آمـده است. او به‌ریاضیات هم علاقه داشت و برآن بود که سرگرمی‌های ریاضی، قوه‌ی تخیل شاگردان را برمی‌انگیزد و این کار از کتاب‌های درسی که زبان خشک و فنی دارند برنمی‌آید. سام لوید[3] (۱۸۴۱ - ۱۹۱۱) معماپرداز معروف آمریکایی نوشته است لانگ فلو درباره‌ی این معما به‌نام «نیلوفر آبی» با او بحث کرده است که در آن نیلوفری در برکه رُسته است.



لوید همان عددهای بهاسکرا را بیان کرده ولی راه حل او همانند طبری مبتنی بر ویژگی وترهای متقاطع در دایره است.

□

مساله‌ی ۴۳ *مفتاح المعاملات* درباره‌ی ۱۰ وزنه‌ی ترازوست که با آن‌ها می‌توان همه‌ی وزن‌های از ۱ تا ۱۰۰۰۰ درم و حتا بیش‌تر را به‌دست آورد. هر درم به‌تقریب ۱۵ گرم است. این مساله‌ی معروف و رایجی است. طبری وزنه‌ها را به‌ترتیب برابر با ۱، ۳، ۹ تا توان نهم ۳ یعنی ۱۹٬۶۸۳ درم بیان می‌کند. ابن بنای مراکشی (۶۵۴ - ۷۲۱ هجری قمری) هم این مساله را در کتاب *رفع الحجاب عن وجوه اعمال الحساب* (ص. ۲۲۱) آورده است. در غرب این مساله را «مساله‌ی توزین باشه» می‌خوانند [به‌نام کلود گاسپار دوباشه[4] (۱۵۹۱ - ۱۶۳۹ میلادی) ریاضیدان فرانسوی] و تصور می‌شود که این مساله را نخستین بار فیبوناچی به‌این صورت مطرح کرده است: «شخصی چهار وزنه‌ی ترازو دارد که می‌تواند با آن‌ها ۱ تا ۴۰ پوند را وزن کند. وزن هر وزنه چقدر است؟» فیبوناچی جواب را به‌صورت ۱، ۳، ۹، ۲۷ پوند می‌دهد. مولفان پس از او در سده‌ی ۱۶ میلادی مساله را تا ۳۶۴ پوند که برای آن ۶ وزنه لازم است پیش برده‌اند.

من خود خاطره‌ای از این مساله دارم. در زمان تحصیل در دبیرستان برای کمک به‌پدرم به‌مغازه‌اش می‌رفتم و گاه لازم می‌شد کالاهایی را برای فروش با ترازو وزن کنم. برای هر مقدار، از بین وزنه‌های موجود آن‌هایی را که مجموعشان با وزن مطلوب برابر بود به‌کار می‌بردم. در

1. Kavanagh
2. Henry Wordworth Longfellow
3. Sam Loyd
4. Claude Gaspar de Bachet

عین حال گاهی در مغازه مجالی دست می‌داد تا به‌مساله‌های ریاضی که توجهم را جلب می‌کرد، بپردازم. متوجه شدم وزنه‌ها در اندازه‌های ۱، ۲، ۳، ۵، ۱۰ کیلوگرم و بالاتر از آن ساخته شده‌اند. معلوم بود دستگاه شمارش دهدهی رایج، عامل انتخاب این مقدارها برای وزنه بوده است. آن وقت برتری عدد ۱۰ را نادیده گرفتم و سعی کردم مناسب‌ترین مقدار را برای وزنه‌ها پیدا کنم. نتیجه یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۳ بود. حالت دیگری را بررسی کردم که در آن مجاز باشیم برای هر بار وزن کردن دوبار از ترازو استفاده کنیم. نتیجه ۱، ۵، ۲۵ الی آخر، یعنی تصاعد هندسی با قدر نسبت ۵ بود. برای حالت سه بار استفاده از ترازو هم تصاعد هندسی با قدر نسبت ۷ به‌دست آمد. سال‌ها بعد، پس از پایان تحصیل در دانشگاه، از آقای دکتر مهدی بهزاد شنیدم این مساله به‌عنوان معما در یک همایش بین‌المللی ریاضی مطرح شده است. راه حل مساله برای حالت ساده‌ای که طبری و فیبوناچی مطرح کرده‌اند به‌این قرار است:

$$W(n) - S(n-1) = S(n-1) + 1$$

$$W(n) = 2S(n-1) + 1$$

$$W(n+1) = 2S(n) + 1$$

با کاستن دو طرف دو معادله‌ی اخیر از یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$W(n+1) - W(n) = 2W(n)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$W(n+1) = 3W(n)$$

برای حالت دوم، داریم:

$$W(n) - 2S(n-1) = 2S(n-1) + 1$$

$$W(n) = 4S(n-1) + 1$$

$$W(n+1) = 4S(n) + 1$$

دوباره با کاستن دو طرف دو معادله‌ی اخیر از یکدیگر نتیجه می‌شود: $W(n+1) - W(n) = 4W(n)$، و خواهیم داشت: $W(n+1) = 5W(n)$

به‌راحتی می‌توان نشان داد اگر برای هر بار وزن کردن مجاز به K بار استفاده از ترازو باشیم، کافی است وزنه‌هایی داشته باشیم که مقدار آن‌ها یک تصاعد هندسی با شروع از ۱ و با قدر نسبت $2K + 1$ باشد.

□

مساله ۴۹ به‌کاربرد مقدارهای عددی حروف الفبای عربی و فارسی که «ابجد» نام دارد مربوط می‌شود. صورت مساله را طبری چنین آورده است: «اگر پرسند ما را که مردی مردی را گفت که نام تو چیست. گفت نام من خمس و نصف خمس دو مانندهٔ یکدیگر. چه باشد این

نام؟» طبری نشان می‌دهد دو مانندەی یکدیگر، دو حرف میم (م) هستند که مقدارش به‌حساب ابجد ۴۰ است. $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{10}$ چهل به‌ترتیب ۸ و ۴ است که متناظر با حروف ح و د است. پس نام مطلوب از این حرف‌ها تشکیل می‌شود و «محمد» است. مساله می‌تواند با مقدارهای دیگری نیز دنبال شود ولی حاصل آن‌ها به‌نامی منتهی نمی‌شود.

□

مساله‌ی ۵۰ هم معمای مشابهی است که جوابش نام «علی» است. این‌ها کهن‌ترین نمونه‌های معماهای فارسی برای نام اشخاص است. استفاده از حساب «ابجد» برای ساختن معما به‌نام اشخاص یا برای ماده تاریخ پیش‌آمدهای مهم در سده‌های بعدی تا سده‌ی ۱۲ هجری بسیار رایج بود ولی بعدها اهمیت اولیه‌ی خود را از دست داد. برای حالت‌هایی مانند فوت شخص مهم یا تکمیل یک بنا، شعری می‌سرودند که در مصراع پایانی آن، تاریخ مزبور به‌صورت مجموع مقدارهای عددی حروف به‌حساب «ابجد» داده می‌شد. برخی نمونه‌های این هنرنمایی، بسیار ظریف و پیچیده است. به‌مناسبت تعمیر آرامگاه حضرت معصومه (ع) در قم که به‌سال ۱۲۱۸ هجری قمری انجام یافت، محمد صادق ناطق اصفهانی (درگذشته به‌سال ۱۲۳۵ هجری قمری) شعری سرود که بعدها «قصیده‌ی معجزیه» نامیده شد. این شعر حاوی ۶۲ بیت یا ۱۲۴ مصراع است و مجموع مقدارهای عددی حروف هر مصراع به‌حساب «ابجد» ۱۲۱۸ می‌شود. مطلع قصیده این است:

این قبه گلبنی است به‌زیور برآمده　　یا پاک گوهریست پر از زیور آمده

این دوحه‌ایست کامده از جنت‌العلا　　یا کوکبی است سعد و منور برآمده

جالب آن که دو عبارت «شصت و دو بیت» و «یکصد و بیست و چهار مصراع» هم به‌حساب «ابجد» معادل ۱۲۱۸ در می‌آیند.

□

مساله ۵۴ به‌این قرار است. سه نفر مقداری نان را با هم به‌تساوی خوردند. یکی از آنان ۳ قرص نان و دیگری ۲ قرص نان آورده بود. نفر سوم نانی نیاورده بود، بنابراین ۵ درم داد تا آنان بین خود تقسیم کنند. این ۵ درم چگونه باید بین دو نفر تقسیم شود؟ مساله از این لحاظ جالب است که ابتدا به‌نظر می‌رسد باید ۵ درم را به‌نسبت ۳ و ۲ تقسیم کنیم ولی باید توجه داشت که لازم است مقدار نانی را که نفر اول و دوم خودشان خورده‌اند به‌حساب بیاوریم. پس می‌توان نوشت:

$$۳ + ۲ = ۵ \qquad ۵ \div ۳ = \frac{۵}{۳} \qquad ۳ - \frac{۵}{۳} = \frac{۴}{۳} \qquad ۲ - \frac{۵}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

پس ۵ درم باید به‌نسبت ۴ و ۱ تقسیم شود.

در رساله‌ای فارسی به‌نام *لطائف الحساب* اثر قطب‌الدین لاهیجی (درگذشته در حوالی ۱۰۹۰ هجری قمری) که نسخه‌ی خطی یگانه‌ی آن به‌شماره‌ی ۵۶۰۹ در کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی (مشهد) نگهداری می‌شود، مساله‌ی مشابهی (در برگ ۲۰ ر) آمده است. در این‌جا به‌جای ۳ و ۲ قرص نان، دو نفر اول ۵ و ۳ قرص نان دارند. در این جا هم معلوم می‌شود که ۸ دیناری که نفر سوم می‌پردازد باید به‌نسبت ۷ و ۱ تقسیم شود نه ۵ و ۳. قطب‌الدین لاهیجی حل این مساله را به‌حضرت علی (ع) نسبت داده است. در منابع کهن‌تر نیز به‌این انتساب برمی‌خوریم؛ از جمله در *ذخائر العقبی* تالیف احمدبن عبدالله الشافعی الطبری (درگذشته به‌سال ۶۹۴ هجری قمری) در این رساله به‌دنبال این مساله، مساله‌ای با ساختار مشابه و در قالب شخصیت‌های تاریخی آورده شده است: «در زمان حسن صباح و خواجه نظام‌الملک وزیر ملکشاه سلجوقی، سلطان دستور داد که ۵۰۰ من مرمر از حلب به‌اصفهان حمل شود. این مقدار مرمر را دو شتربان حمل کردند که یکی ۴ شتر و دیگری ۶ شتر داشت. هر شتربان ۵۰۰ من بار شخصی داشت. وقتی کار حمل مرمر به‌پایان رسید، سلطان ۱۰۰۰ دینار دستمزد پرداخت. خواجه نظام‌الملک به‌شتربان‌هایی که ۶ و ۴ شتر داشتند به‌ترتیب ۶۰۰ و ۴۰۰ دینار داد. حسن صباح به‌سلطان اطلاع داد این توزیع عادلانه نیست. استدلال او چنین بود: شترها ۱۵۰۰ من بار حمل کرده‌اند، پس هر شتر ۱۵۰ من حمل کرده است. سهم بار ۴ شتر ۶۰۰ من می‌شود که ۵۰۰ من آن بار شخصی بوده است. سهم بار ۶ شتر هم ۹۰۰ من بوده است که باز ۵۰۰ من آن بار شخصی شتربان دیگر بوده است. پس دستمزد باید به‌نسبت ۵۰۰ـ۹۰۰ و ۵۰۰ـ۶۰۰ یا ۴۰۰ و ۱۰۰ یا ۴ و ۱ تقسیم شود.

یاکوب ای. پرلمان[1] مولف مشهور کتاب‌های سرگرمی‌های ریاضی که اهل شوروی بود و طی جنگ جهانی دوم در هنگام محاصره‌ی لنینگراد کشته شد، نیز صورتی از این مساله را در کتاب *ریاضیات زنده*[2] آورده است. در این صورت، سه مسافر شبی را در اتاقی که بخاری هیزمی دارد سر کردند. یکی از آن‌ها ۵ هیزم و دیگری ۳ هیزم آورده بود. سومی ۸ واحد پول به‌آن‌ها پرداخت. این پول چگونه باید بین آن دو تقسیم شود؟

1. Jacob I. Perelman

۲. ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات میترا.